Durée : 4 heures

∽ Correction du baccalauréat STI 2D/STL ∽ Antilles-Guyane 19 juin 2013

EXERCICE 1 **4 points**

1. Pour $n = 1$, l'algorithme affiche $u_1 = 2 \times 1,5 = 3$.
   Pour $n = 2$, l'algorithme affiche $u_2 = 3 \times 1,5 = 4,5$.
   Pour $n = 3$, l'algorithme affiche $u_3 = 4,5 \times 1,5 = 6,75$.
2. **a.** D'après la définition, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,5$ et de premier terme $u_0 = 2$.

   b. On sait que pour tout naturel n, $\quad u_n = u_0 \times q^n = 2 \times 1,5^n$.
3. **a.** $S_0 = u_0 = 2$;
   $S_1 = u_0 + u_1 = 2 + 3 = 5$;
   $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 2 + 3 + 4,5 = 9,5$.

   b. Voici l'algorithme modifié :

Entrée :	Saisir la valeur de l'entier naturel n
Traitement :	Affecter 2 à la variable u
	Affecter 2 à la variable S
	Pour i variant de 1 à n
	Affecter $1,5u$ à u
	Affecter $S + u$ à S
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher S

   c. La somme des termes de u_0 à u_n est égale à :
   $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - 1,5^{n+1}}{1 - 1,5} = 2 \times \frac{1,5^{n+1} - 1}{1,5 - 1} = 4\left(1,5^{n+1} - 1\right) =$
   $S_n = 6 \times 1,5^n - 4$.

   d. Comme $1,5 > 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1,5^n = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Il y a $1 + 3 + 3 = 7$ boules dont la masse n'appartient pas à l'intervalle $[1\,197 ; 1\,203]$. Il y a donc $50 - 7 = 43$ boules de « de bonne qualité » sur 50 soit $\dfrac{43}{50} = \dfrac{86}{100} = 0,86 = 86\,\%$.

   b. La moyenne : $\overline{m} = \dfrac{1 \times 1\,195 + 3 \times 1\,196 + \ldots 3 \times 1\,204}{50} = 1\,199,76 \approx 1\,200$ (g).
   Pour l'écart-type σ, la calculatrice donne $\sigma \approx 2$.
2. **a.** Le choix de chaque pièce d'un lot étant assimilé à un tirage avec remise, et comme il n'y a que deux issues X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,86$.

   b. Cette probabilité est égale à $p(X = 48) + p(X = 49) + p(X = 50) \approx 0,017\,23 + 0,004\,32 + 0,000\,53 \approx 0,022\,08 \approx 0,022$.
3. **a.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,86$, donc $m = 50 \times 0,86 = 43$ et $\sigma = \sqrt{50 \times 0,86 \times (1)0,86)} = \sqrt{6,02} \approx 2,453 \approx 2,45$.

   b. On a $P(X \geqslant 48) = 0,5 - P(43 \leqslant X \leqslant 48) \approx 0,02$.

4. a. L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des boules de bonne qualité pour un lot de 50 pièces est égal à :

$I = \left[0,86 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,86 \times 0,14}{50}}\ ;\ 0,86 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,86 \times 0,14}{50}}\right] \approx [0,764\ ;\ 0,956]$.

b. On vérifie que :

$n = 50 \quad ; \quad np = 50 \times 0,86 = 43 \quad ; \quad n(1-p) = 50 \times 0,14 = 7$.

Toutes les conditions sont réunies et il y a 42boules de bonne qualité sur 50 soit une fréquence $f = \dfrac{42}{50} = 0,84$.

Comme $0,84 \in [0,764\ ;\ 0,956]$, on peut dire au seuil de confiance de 95 % que 86 % des boules sont de bonne qualité.

EXERCICE 3 **5 points**

1. a. $(2-\mathrm{i})z = 2 - 6\mathrm{i} \iff z = \dfrac{2-6\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} \iff z = \dfrac{(2-6\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$

$\iff z = \dfrac{4+2\mathrm{i}-12\mathrm{i}+6}{4+1} \iff z = \dfrac{10-10\mathrm{i}}{5} = 2-2\mathrm{i}$.

On a donc $z_1 = 2 - 2\mathrm{i}$.

b. Si r est le module de z_1, on a $r^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$, donc $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Si θ est l'argument de z_1, on sait que $\left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta & = & \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta & = & \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

On a donc $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ et $z_1 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

c. D'après la question précédente $z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

Or $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - -\mathrm{i} = -\mathrm{i}$.

Donc $z_2 = -\mathrm{i}(2-2\mathrm{i}) = -2\mathrm{i} - 2 = -2 - 2\mathrm{i}$.

2. a. Voir la figure

b. Le repère étant orthonormal, avec $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CB}}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$, on a

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = -2 \times 2 + -2 \times (-2) = -4 + 4 = 0$.

c. D'après la question précédente $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ sont orthogonaux donc (CA) est perpendiculaire à (CB) : le triangle ABC est rectangle en C.

D'autre part $\mathrm{CA}^2 = (-2)^2 + (-2)^2 = 4 + 4 = 8$ et

$\mathrm{CB}^2 = (-2)^2 + (-2)^2 = 4 + 4 = 8$.

$\mathrm{CA}^2 = \mathrm{CB}^2$ donc CA = CB : le triangle est isocèle en C.

Conclusion : le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

EXERCICE 4 **6 points**

1. a. Sur le graphique on voit que f est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$; donc sur cet intervalle $f'(x) < 0$: seuls les points de Γ ont leurs ordonnées négatives : Γ est donc la représentation de f'.

b. D'après la question précédente C est la représentation graphique de l'une des primitives de f. On lit sur le graphe que le point de C d'abscisse 1 a pour ordonnée 1. $F(1) = 1$.

2. a. On a pour $x > 0$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$, donc par différence $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \ln x = +\infty$.

Graphiquement ceci signifie que l'axe des ordonnées est asymptote verticale au graphe de f.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$, donc par somme de limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

c. Sur $]0~;~+\infty[$, f est dérivable et
$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1-x}{x^2} = -\dfrac{x+1}{x^2} = \dfrac{-x-1}{x^2}$.

d. Comme $x^2 > 0$ pour $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $-x-1$.
$-x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$ et $-x-1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$.
Comme $x > 0$, la dérivée est donc négative et ceci confirme que la fonction f est décroissante sur $]0~;~+\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3. a. On a $H'(x) = 1 - 1\ln x - (x-1)\times\dfrac{1}{x} = 1 - \ln x - 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} - \ln x = f(x)$.
H est donc une des primitives de f.

b. On a $H(1) = \dfrac{1}{1} - \ln 1 = 1$ et on a vu que $F(1) = 1$, donc $F = H$ et $F(x) = x - (x-1)\ln x$.

c. On connaît une primitive de f on peut donc calculer l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(1) =$
$\mathrm{e} - (\mathrm{e}-1)\ln\mathrm{e} - [1 - (1-1)\ln 1] = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) - 1 = 1 - 1 = 0$.