Baccalauréat STI Arts appliqués– Métropole juin 2005

EXERCICE 1

Lors d'un concours de karaoké, le public, composé de 450 jeunes, dont 150 garçons, a voté pour l'un des trois finalistes, Hatxi, Élodie et Machyl.
Les voix sont réparties de la façon suivante :

- 45 garçons ont voté pour Hatxi ;
- 35 % des filles ont voté pour Élodie.
- Parmi les 165 jeunes qui ont voté pour Machyl, il y a 20 % de garçons.

1. Reproduire puis compléter le tableau suivant :

	Hatxi	Élodie	Machyl	Total
Garçons				
Filles				
Total				

2. On choisit au hasard un jeune du public. On suppose que tous les choix sont équiprobables et on considère les évènements suivants :
A : « le jeune choisi est un garçon » ;
B : « le jeune choisi a voté pour Machyl ».
Les résultats demandés seront donnés sous forme décimale arrondie au centième.

   a. Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.
   b. Définir par une phrase les évènements suivants : $A \cap B$ et $A \cup B$.
   c. Calculer $P(A \cap B)$, en déduire $P(A \cup B)$.

EXERCICE 2

Un club sportif confie l'élaboration d'un logo à une agence. Celle-ci choisit un « drapeau » pour motif.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par

$$f(x) = x^3 - x + 2.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans ce repère.

1. f' désigne la fonction dérivée de f ; calculer $f'(x)$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[-1 ; 1]$ sachant que $f'(x) = 3\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
On indiquera pour $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ des valeurs approchées décimales arrondies au centième.
3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :
(on donnera des valeurs approchées décimales arrondies au centième).

x	-1	$-0,8$	$-0,6$	$-0,4$	$-0,2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$			2,38					1,66			

4. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur la feuille de papier millimétré.
5. Calculer l'intégrale $\mathrm{I}=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-1~;~1]$ par

$$g(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[-1~;~1]$, $g'(x) = x\mathrm{e}^x$ où g' désigne la fonction dérivée de g.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $[-1~;~1]$ et dresser le tableau de variations de g.
3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs approchées décimales arrondies au centième).

x	-1	$-0,8$	$-0,4$	0	0,4	0,6	0,8	1
$g(x)$		1,19				1,27		

4. Tracer $\mathscr{C}_g$ dans le même repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ que précédemment.
5. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[-1~;~1]$ par

$$G(x) = (x-2)\mathrm{e}^x + 2x.$$

   a. Montrer que G est une primitive de g sur $[-1~;~1]$.

   b. Calculer l'intégrale $\mathrm{J} = \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C

La partie du plan $\mathscr{A}$ limitée par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et par la droite d'équation $x = -1$ représente la toile du drapeau.

1. Placer les points P$(-1~;~2)$ et Q$(-1~;~0)$ puis tracer le segment [PQ] pour achever le motif.
2. On suppose que, pour tout x de l'intervalle $[-1~;~1]$, $f(x) \geqslant g(x)$ et que l'aire de la partie $\mathscr{A}$ du plan est donnée, en unités d'aires, par $\mathrm{A} = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

   a. Calculer la valeur exacte de A.

   b. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire de $\mathscr{A}$ exprimée en cm^2.