Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole juin 2004

EXERCICE 1 **8 points**

Sophie et Luc jouent très mal aux échecs, c'est pourquoi ils ont inventé le jeu suivant :
Sophie possède un sac contenant cinq pièces blanches : une reine, une tour, deux cavaliers et un pion.
Le sac de Luc contient cinq pièces noires : une reine, deux tours, et deux pions.
Principe du jeu :
Chacun tire une pièce de son sac, celui qui a la pièce la plus forte gagne la partie.
Une reine bat toutes les autres pièces.
Une tour bat un cavalier ou un pion.
Un cavalier bat un pion.
Deux pièces identiques font partie nulle.
Exemples :
Sophie tire une reine et Luc une tour : Sophie gagne la partie.
Sophie et Luc tirent tous les deux un pion : il y a partie nulle.

1. Dans le tableau ci-dessous, chaque case correspond à une issue possible du jeu.

Sophie \ Luc	R	T_1	T_2	P_1	P_2
R					
T					
C_1					
C_2					
P					

Recopier ce tableau et compléter chaque case :
— Par un S lorsque Sophie gagne.
— Par un L lorsque Luc gagne.
— Par un N lorsque la partie est nulle.
On suppose les tirages équiprobables.

2. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a. A : « La partie est nulle ».
   b. B : « Sophie gagne ».
   c. C : « Luc gagne ».
3. Y a-t-il, du point de vue du contenu des sacs, un joueur avantagé par rapport à l'autre ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **12 points**

Un musée souhaite orner ses publications d'un motif en filigrane.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm.
L'axe des ordonnées sera centré sur la feuille de papier millimétré.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~1]$ par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^x - 4x.$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. f' désignant la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
3. Tracer avec soin la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T en A.
4. Calculer l'intégrale $\text{I}_f = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = \ln(x+1).$$

On appelle $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan muni du repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction g. Dresser son tableau de variations.
2. Tracer avec soin la courbe $\mathcal{C}_g$ dans le même repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ que précédemment.
3. Soit G la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$G(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x+1).$$

   a. Vérifier que G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   b. Calculer l'intégrale $\text{I}_g = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\text{d}x$.

Partie C : constitution du motif

On nomme P le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1 et Q le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 1.
La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées transforme les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, respectivement en courbes $\mathcal{C}'_f$ et $\mathcal{C}'_g$ (les points P et Q ayant pour images respectives P′ et Q′).
Tracer les courbes $\mathcal{C}'_f$ et $\mathcal{C}'_g$ ainsi que les segments [PQ] et [P′Q′].
Le domaine limité par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}'_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}'_g$ ainsi que par les segments [PQ] et [P′Q′] constitue le motif que cherche à reproduire le musée.
Expliquer comment on peut calculer l'aire de ce motif et calculer cette aire en cm^2 (on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).