Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie septembre 2003
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

À tout point M d'affixe $z = x + iy$, distinct de O, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z. On pose dans la suite de l'exercice $z' = x' + iy'$ où x' et y' sont deux réels.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. On appelle A, B, C, D, les points d'affixes respectives

$$z_A = i, \quad z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_C = -1, \quad z_D = -2 - i.$$

   a. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes $z_{B'} = \dfrac{1}{\overline{z_B}}$ et $z_{D'} = \dfrac{1}{\overline{z_D}}$.

   b. Montrer que les points O, B et B′ sont alignés ainsi que les points O, D et D′.

   c. Calculer $|z_A - z_B|$, $\left|z_{B'} - z_B\right|$, $\left|z_{D'} - z_B\right|$ et en déduire que les quatre points A, B′, C, D′ sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

3. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, tracer le cercle $\mathscr{C}$.
4. Utiliser les questions précédentes pour construire géométriquement les points B′ et D′.

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne contient dix jetons indiscernables au toucher. Sur chacun de ces jetons est inscrit l'un des numéros 1, 2, 3 ou 4.
Un jeton porte le numéro 1, deux jetons le numéro 2, trois jetons le numéro 3 et 4 jetons le numéro 4.
Un jeu consiste à tirer au hasard et avec remise, deux jetons de cette urne; les tirages sont supposés équiprobables. À l'issue de la partie, le joueur reçoit le nombre d'euros correspondant à la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés.

1. On appelle X la variable aléatoire qui, à l'issue de chaque partie, associe le nombre d'euros reçus par le joueur.

   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

   b. Calculer $p(X = 2)$, probabilité que la somme remise au joueur soit 2 €.

   c. Montrer que $p(X = 6) = \dfrac{25}{100}$.

   d. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. On présentera les résultats dans un tableau.

   e. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Le joueur doit verser une « mise » m exprimée en euros, avant chaque partie.
   Quelle doit être la valeur minimale de cette mise, arrondie à l'euro, pour que l'organisateur du jeu ait l'espoir d'être bénéficiaire ?

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

I. Première partie : étude d'une fonction g

On appelle g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. (L'étude des limites aux bornes de l'intervalle n'est pas demandée).
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

II. Deuxième partie : étude d'une fonction f

On appelle f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. On appelle (D) la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 2$.
   a. Démontrer que la droite (D) est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   b. Étudier les positions respectives de la droite (D) et de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Le sens de variation de f
   a. Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ et en déduire le sens de variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variations de f.
4. On appelle (Δ) la tangente à $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse 1.
   a. Déterminer une équation de (Δ).
   b. Déterminer les coordonnées du point B de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente (T) est parallèle à (D).
5. Construire avec soin les droites (D), (Δ), (T) puis la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm.
6. Calcul d'aire.
   a. On appelle k la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $k(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   Déterminer une primitive K de k sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Soit t un nombre réel strictement supérieur à 1. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(t)$ du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}$ la droite (D) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.
   c. Déterminer t pour que $\mathcal{A}(t) = 100$ cm^2.