Durée : 4 heures

Baccalauréat STI mars 2010 Nouvelle-Calédonie
Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation

$$(\text{E}) : \quad z^3 - 2\left(1+\sqrt{3}\right)z^2 + 4\left(1+\sqrt{3}\right)z - 8 = 0.$$

a. Vérifier que le nombre 2 est une solution de l'équation (E).

b. En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que l'équation (E) soit équivalente à l'équation :
$(z-2)\left(z^2+\alpha z+\beta\right) = 0$.

c. Résoudre l'équation $z^2+\alpha z+\beta = 0$, puis déterminer le module et un argument de chacune de ses solutions.

On désigne par A et B les points du plan complexe d'affixes respectives :
$a = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et $b = 2$.
On désigne par C le milieu du segment [AB], et on note c l'affixe du point C.

2. On se propose dans cette question de déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

a. Placer les points A, B, C dans le repère $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ et démontrer que le triangle OAB est isocèle.

b. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OB}} ;\ \overrightarrow{\text{OC}}\right)$.

c. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe c.

d. Calculer le module de c et démontrer que $|c| = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

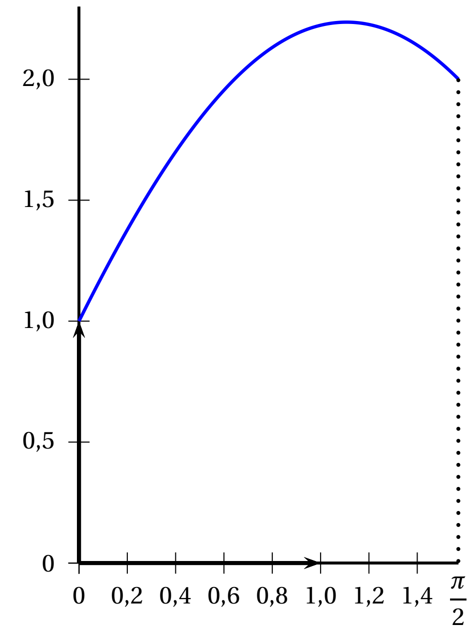
e. Démontrer que $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE 2 **5 points**

On note f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0 ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \cos x + 2\sin x.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f est tracée ci-contre, dans un repère orthogonal $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On note $\mathscr{D}$ le domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d' équations $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.
Le but de cet exercice est de déterminer la mesure $\mathscr{V}$, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation de $\mathscr{D}$ autour de l'axe $\left(O~;~\vec{\imath}\right)$.



1. Calcul de deux intégrales

   On note I et J les deux intégrales : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

   a. En simplifiant l'écriture de $I + J$, démontrer que $I + J = \dfrac{\pi}{2}$.

   b. Démontrer de même que $I - J = 0$.

   c. Déduire des questions a. et b. les valeurs de I et J.

2. On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ cherché est donné par la formule : $\mathscr{V} = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Démontrer que $f^2(x) = \cos^2 x + 2\sin 2x + 4\sin^2 x$.

   b. Déduire des questions précédentes, la valeur exacte de $\mathscr{V}$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' - y = -\mathrm{e}^x$.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' - y = 0$.
2. Vérifier que toute fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = -x\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x$, où C est une constante, est une solution de l'équation différentielle (E).
3. Parmi ces solutions, déterminer celle qui vérifie la condition initiale : $u(0) = 2$.

Partie B : Étude d'une fonction

On note f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

1. Étude des limites de la fonction f

a. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale et en donner une équation.

2. Étude des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. Tracé de la courbe $\mathscr{C}$

a. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.

c. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$, la droite T_0 et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Calcul d'une aire plane

1. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (3 - x)\mathrm{e}^{x}$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit α un nombre réel strictement inférieur à 2.
On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 2$.

a. Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α.

b. Déterminer la limite éventuelle de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.