✿ Baccalauréat STI Antilles juin 2002 ✿
Génie civil, énergétique, mécanique

EXERCICE 1 **4 points**

Soit i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$

1. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation en z

$$z^2 + 25 = 0.$$

   b. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

2. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation en z

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

   b. Calculer, sous forme algébrique, le carré de chacune des solutions de cette équation.

3. Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -3 - 4\text{i} \quad z_{\text{B}} = -3 + 4\text{i} \quad z_{\text{C}} = 5\text{i} \quad z_{\text{D}} = -5\text{i}.$$

   a. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

   b. Démontrer que le triangle BCD est rectangle.

   c. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

Deux tableaux sont donnés. Ils sont à compléter et à rendre avec la copie.

Une machine fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires qui peuvent présenter trois sortes de défauts un défaut d'épaisseur, un défaut de longueur, un défaut de largeur.

Dans un lot de 1 000 pièces, fabriquées par cette machine, 90 % des pièces n'ont aucun défaut, 0,2 % ont les trois défauts et 26 pièces ont comme seul défaut un défaut d'épaisseur.

Parmi les 950 pièces n'ayant pas de défaut d'épaisseur, il y a 29 pièces qui ont un défaut de longueur et 10 pièces qui ont un défaut de longueur et un défaut de largeur.

Parmi les pièces ayant un défaut d'épaisseur, 24 % ont un défaut de longueur.

1. **a.** Compléter les deux tableaux suivants.

Pièces n'ayant pas de défaut d'épaisseur			
Longueur / Largeur	Pièces ayant un défaut de longueur	Pièces n'ayant pas de défaut de longueur	
Pièces ayant un défaut de largeur	10		
Pièces n'ayant pas de défaut de largeur			
	29		950

Pièces ayant un défaut d'épaisseur			
Longueur / Largeur	Pièces ayant un défaut de longueur	Pièces n'ayant pas de défaut de longueur	
Pièces ayant un défaut de largeur			
Pièces n'ayant pas de défaut de largeur		26	

b. On choisit au hasard une pièce dans ce lot de 1 000 pièces et on suppose tous les tirages équiprobables.

On définit les évènements suivants :

— A : « la pièce possède un seul défaut » ;

— B : « la pièce possède deux défauts et deux seulement ».

Montrer que : $p(A) = 0,066$ et $p(B) = 0,032$.

2. On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute pièce tirée au hasard dans ce lot de 1 000 pièces, associe le nombre de défauts de cette pièce.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable X. On donnera les résultats sous forme de tableau.

b. Calculer la valeur exacte de l'espérance mathématique $\text{E}(X)$.

PROBLÈME 12 points

Soit la fonction numérique f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3\ln x}{2x^2} + x - 1.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ l'unité de longueur est 2 cm.

Partie A - étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction numérique g définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 6\ln x + 3.$$

1. Déterminer le signe de $x^3 - 1$ suivant les valeurs de x, élément de $]0~;~+\infty[$.

On pourra utiliser le fait que

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right), \text{ pour tout réel } x.$$

2. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe pour tout x élément de $]0~;~+\infty[$. Donner les variations de la fonction g.

3. En déduire que, pour tout x élément de $]0~;~+\infty[$, $g(x)$ est strictement positif

Partie B - étude de la fonction f

1. Calculer la limite de $\dfrac{\ln x}{x^2}$ quand x tend vers 0, en justifiant la réponse.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

2. a. Préciser la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   c. Déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^3}, \quad \text{pour tout } x \text{ élément de }]0~;~+\infty[.$$

   En déduire le sens de variation de la fonction f.
4. a. Soit K le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point K.
   b. Tracer avec soin la droite $\mathcal{D}$, la droite $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C – Calcul d'une aire

1. Soit la fonction numérique h définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

   Soit h' la fonction dérivée de la fonction h. Calculer $h'(x)$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.
3. On considère la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   a. Hachurer cette partie du plan, puis calculer la valeur exacte de son aire en cm^2.
   b. Donner la valeur arrondie au mm^2 de cette aire.