Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie
Génie mécanique, énergétique, civil novembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On note i nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Pour tout nombre complexe z on pose $P(z) = z^3 - 2z - 4$.

1. Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a $P(z) = (z-2)\left(z^2+2z+2\right)$.
2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.
3. On appelle A, B, C et D les points de $\mathscr{P}$ d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -1 - \mathrm{i}~;~z_{\mathrm{B}} = 2~;~z_{\mathrm{C}} = 3 + 3\mathrm{i}~;~z_{\mathrm{D}} = 2\mathrm{i}.$$

   a. Placer les points A, B C et D dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.
   b. Calculer $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}},~z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{D}},~z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{A}}$.
   c. Justifier alors que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ et que AD = AB.
   d. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 2 **5 points**

On considère les intégrales I et J définies par $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} x(\cos x)^2\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} x(\sin x)^2\,\mathrm{d}x$.
Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs exactes de ces intégrales sans les calculer.

1. Déterminer la valeur exacte de I + J.
2. On se propose dans cette question de rechercher de la valeur exacte de I − J.
   a. Démontrer que $\mathrm{I} - \mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$.
   b. On appelle f la fonction numérique définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x).$$

   Démontrer que pour tout nombre réel $x,~f'(x) = x\cos(2x)$.
   c. En déduire la valeur exacte de I − J.
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs exactes des intégrales I et J.

PROBLÈME **10 points**

I) Première partie : étude d'une fonction g

On appelle g la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x) = (x+1)\mathrm{e}^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$. (On pourra écrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + 1$).
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Étude du signe de $g(x)$.

a. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x et étudier son signe sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

b. En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variations dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum de g.

c. Justifier que pour tout x, $g(x) > 0$.

II) Deuxième partie : étude et représentation graphique d'une fonction f

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^x + x - 3$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan, unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

2. On appelle (D) la droite d'équation $y = x - 3$.

a. Démontrer que la droite (D) est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (D). On précisera les coordonnées de leur point d'intersection I.

3. Étude des variations de f.

a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.

b. À l'aide des résultats obtenus dans la première partie, déterminer le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

5. Tracer la droite (D), la tangente (T) puis la courbe dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

III) Troisième partie : le but de cette partie est de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et de donner un encadrement de celles-ci.

1. En utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et en justifiant la réponse, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2. Localisation et encadrement d'une solution.

a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

b. Justifier les trois affirmations suivantes :
(1) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$.
(2) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
(3) L'équation $f(x) = 0$ a une solution unique notée α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

c. En expliquant brièvement la méthode utilisée, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.