Baccalauréat STI La Réunion juin 2003
Génie énergétique, civil, mécanique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm. On note i le sombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit $P(z) = z^3 - \left(1+2\sqrt{3}\right)z^2 + \left(12+2\sqrt{3}\right)z - 12$ où z est un nombre complexe.
   a. Vérifier que $P(1) = 0$.
   b. Déterminer le réel b tel que $P(z) = (z-1)\left(z^2 + bz + 12\right)$.
   c. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z
   $$z^2 - 2z\sqrt{3} + 12 = 0.$$
   d. Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan complexe, soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :
   $$z_{\text{A}} = \sqrt{3} + 3\text{i},\ z_{\text{B}} = 1,\ z_{\text{C}} = 4 + \left(1-\sqrt{3}\right)\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = \left(3+\sqrt{3}\right) + \left(4-\sqrt{3}\right)\text{i}.$$
   a. Placer ces quatre points dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   b. Calculer les affixes des milieux des segments [AC] et [BD].En déduire que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
   c. Démontrer que ABCD est un carré.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle (E) : $9y'' + y = 0$ où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

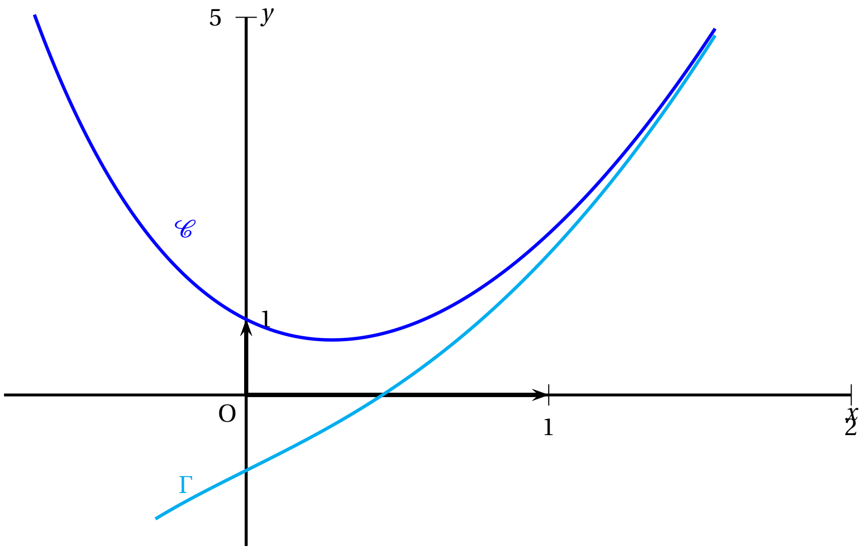
1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f qui vérifie les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Montrer que pour tout réel x, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :
   $$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

PROBLÈME **11 points**

On définit sur $\mathbb{R}$ deux fonctions f et g par

$$f(x) = 2x^2 + \text{e}^{-2x} \text{ et } g(x) = 2x^2 - \text{e}^{-2x}$$

Ces fonctions sont représentées par les courbes $\mathscr{C}$ et Γ dans un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ sur le graphique suivant :



Partie A

1. **a.** Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
   b. Associer alors à chaque fonction sa courbe représentative.
2. Justifier par le calcul que la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la courbe Γ.

Partie B : étude de la fonction f à l'aide d'une fonction auxiliaire h

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Soit la fonction auxiliaire h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x - \mathrm{e}^{-2x}$.
   Montrer que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et justifier que cette équation n'a pas d'autre solution dans $\mathbb{R}$.
   b. Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.
   c. Déterminer le signe de $h(x)$ sur les intervalles $]-\infty\ ;\ \alpha[$ et $]\alpha\ ;\ +\infty[$.
4. **a.** Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 2h(x)$.
   b. Déduire des questions 3. c. et 4. a. le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Calculer une valeur approchée de $f(\alpha)$.

Partie C : comportement des courbes $\mathscr{C}$ et Γ pour x assez grand

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x) - g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) - g(x) \leqslant \dfrac{1}{10}$. Donner une interprétation graphique du résultat.
2. **a.** Pour tout λ réel strictement positif soit $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} \left[f(x) - g(x)\right]\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que $I(\lambda) = 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}$.
   b. Calculer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.