Baccalauréat STI Métropole septembre 2000
Génie Civil, énergétique, mécanique (A et F)

EXERCICE 1 **4 points**

Les trois machines A, B et C d'un atelier ont une production totale de 10 000 pièces du même type. Elles produisent respectivement 2 000, 3 000 et 5 000 pièces.
Par ailleurs, on constate que le nombre de pièces avec défaut est de 100 pour A, de 120 pour B et de 150 pour C.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Machine A	Machine B	Machine C	TOTAL
Nombre de pièces sans défaut				
Nombre de pièces avec défaut			150	
TOTAL	2 000			10 000

2. Une pièce est choisie au hasard dans la production totale.
Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

a. Montrer que la probabilité p_1 pour qu'elle provienne de A est égale à $0,2$.

b. Montrer que la probabilité p_2 pour qu'elle ait un défaut est égale à $0,037$.

c. Calculer à 10^{-3} près la probabilité p_3 pour qu'elle provienne de B et qu'elle soit sans défaut.

3. Une pièce est choisie au hasard dans l'ensemble des pièces sans défaut.
Toutes ces pièces ayant la même probabilité d'être choisies, calculer à 10^{-3} près la probabilité pour qu'elle provienne de B.

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$(z-4)\left(z^2-2z+4\right)=0.$$

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}}=4 \quad ; \quad z_{\text{B}}=1+\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_{\text{C}}=1-\text{i}\sqrt{3}.$$

a. Écrire z_{B} et z_{C} sous forme trigonométrique.

b. Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe.
On fera le dessin sur la copie

c. Calculer $|z_{\text{B}}-z_{\text{A}}|$, $|z_{\text{C}}-z_{\text{B}}|$ et $|z_{\text{C}}-z_{\text{A}}|$.

d. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On note K le point d'affixe $z_{\text{K}}=-\sqrt{3}+\text{i}$.

a. Placer avec précision le point K sur la figure précédente.

b. Démontrer que le triangle OBK est rectangle isocèle.

PROBLÈME **12 points**

On se propose d'étudier, dans une première partie, quelques propriétés d'une fonction f dont la représentation graphique est donnée. On s'intéresse, dans une seconde partie, à l'une de ses primitives et, dans une troisième partie, au calcul d'une aire.

Pour tout le problème, le plan est muni du repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ *d'unité graphique* 4 cm.

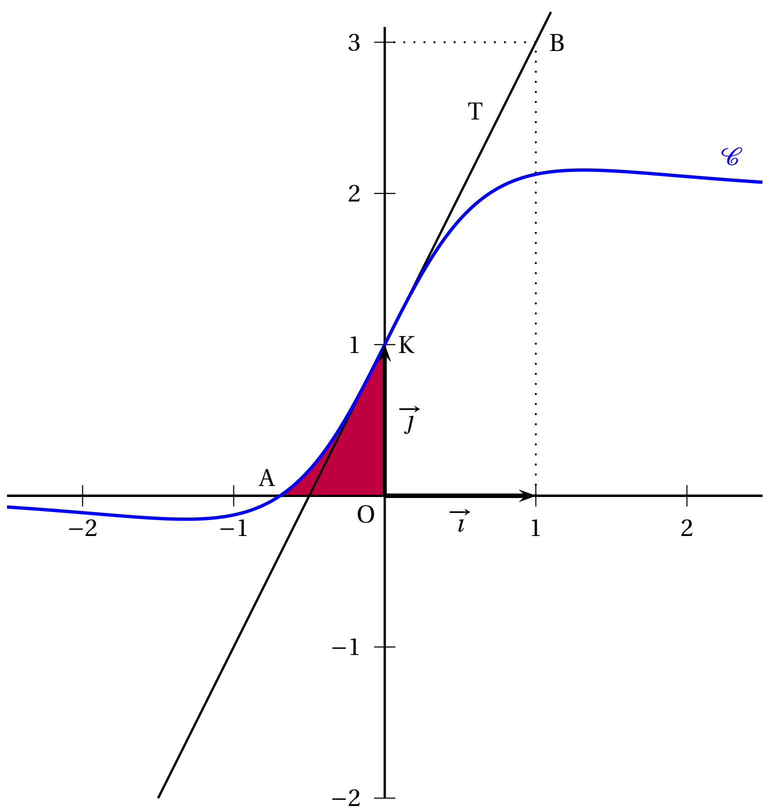
Partie A - étude graphique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]-\infty~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\text{e}^{2x} - \text{e}^{x}}{\text{e}^{2x} - \text{e}^{x} + 1}.$$

On trouvera sur le graphique ci-après, le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et le tracé de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point K(0 ; 1), dans le repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

On admet que le point K est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ et que le point B(1 ; 3) appartient à la tangente T.



1. On se propose de démontrer certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$.
   a. Étudier la limite de f en $-\infty$ et préciser l'asymptote à $\mathscr{C}$ correspondante.
   b. On admet que pour tout réel x, $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{2 - \text{e}^{-x}}{1 - \text{e}^{-x} + \text{e}^{-2x}}.$$

   En déduire la limite de f en $+\infty$ et préciser l'asymptote à $\mathscr{C}$ correspondante.

c. Vérifier, par le calcul, que le point $A(-\ln 2\ ;\ 0)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}$.

2. Grâce à une lecture graphique, répondre aux questions suivantes en justifiant vos réponses.

a. Déterminer la valeur de $f'(0)$.

b. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B - étude d'une primitive de f sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$

Soit F la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right).$$

et Γ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier la limite de F en $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe Γ.

2. **a.** Vérifier que pour tout réel x, $F(x)$ peut s'écrire :

$$F(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right).$$

b. Calculer la limite de F en $+\infty$, puis la limite de $F(x) - (2x)$ en $+\infty$.

c. En déduire que la courbe Γ admet une droite asymptote.

3. **a.** Démontrer que f est la fonction dérivée de F sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

b. Vérifier que $F(-\ln 2) = \ln \dfrac{3}{4}$.

c. Déduire de la **partie A** le tableau de variations de la fonction F.

4. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les résultats à 10^{-2} près :

x	-3	-2	-1	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$
$F(x)$									

5. Sur la feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm, les droites d'équations respectives $y = 2x$ et $y = 0$, puis la courbe Γ.

Partie C - Calcul d'une aire

1. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. En déduire la valeur exacte en cm^2 de l'aire du domaine AOK (grisé sur la courbe jointe) et en donner une valeur approchée à un millimètre carré près par excès.