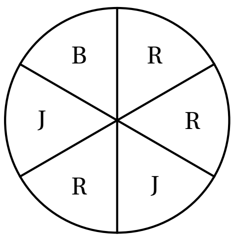
# ∽ Baccalauréat TSI Métropole juin 2002 ∽
# Génie mécanique, énergétique, civil

## EXERCICE 1 — 4 points

**Partie A**

Une roue de loterie comporte 3 secteurs, portant respectivement les numéros 1, 2 et 3. Quand on fait tourner la roue, un repère indique le numéro sortant.
La probabilité de sortie du numéro 2 est double de la probabilité de sortie du numéro 1, et la probabilité de sortie du numéro 3 est triple de celle du numéro 1.
Calculer les probabilités de sortie respectives des trois numéros.

**Partie B**




La roue est maintenant divisée en 6 secteurs égaux ayant chacun la même probabilité de s'arrêter devant le repère.
2 secteurs sont jaunes (marqués J sur la figure)
3 secteurs sont rouges (marqués R sur la figure)
1 secteur est bleu (marqué B sur la figure)

La règle du jeu est la suivante : pour participer au jeu, le joueur doit miser une certaine somme et si le jaune sort, il gagne 20 €, si le bleu sort, il gagne 30 €, si le rouge sort, il ne gagne rien.

1. Dans cette question, on suppose que la mise est de 10 €. On appelle $X$ la variable aléatoire qui à chaque arrêt de la roue associe le gain effectif (positif ou négatif) du joueur. (Par exemple, si le bleu sort, le gain effectif pour le joueur est de 20 €.
   **a.** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.
   **b.** Calculer son espérance mathématique.
2. L'organisateur du jeu ne souhaite pas que l'espérance de gain du joueur sait positive. à quelle valeur minimale, exprimée par un nombre entier d'euros, doit-il fixer le montant de la mise ?

## EXERCICE 2 — 5 points

1. Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 9z - 10$ où $z$ appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
   **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.
   **b.** Calculer $P(2)$.
   **c.** Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que $P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   **d.** Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
   On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 2 \quad ; \quad z_{\mathrm{B}} = 1 + 2\mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{C}} = 1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

   **a.** Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe (sur papier millimétré).
   **b.** Calculer les modules des nombres complexes $z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{D}}$, $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{D}}$ et $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$.
   En déduire la nature du triangle ABD.

## PROBLÈME 11 points

**Partie A : étude du signe de $x^3 - 1 + 2\ln(x)$**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0\ ;\ ,+\infty[$ par

$$g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x.$$

($\ln x$ désigne le logarithme népérien de $x$)

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$. (Les limites ne sont pas demandées).
3. Calculer $g(1)$.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

**Partie B : Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire**
On considère la fonction $f$ définie sur $]0\ ;\ ,+\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
(unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.
   **b.** Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$. Y a-t'il une autre asymptote à $(\mathscr{C})$ ? Si oui, donner son équation.
   **c.** Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
   **d.** En utilisant les résultats de la **partie A**, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
   **e.** Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe $(\mathscr{C})$.
   Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).
   **f.** Tracer dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites (D) et (T).
2. **a.** Montrer que la fonction $H$ définie par

   $$H(x) = -\frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

   est une primitive de la fonction $h$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.
   **b.** Soit $\Delta$ le domaine plan limité par (D), $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{\text{e}}$.
   Hachurer $\Delta$ ; calculer la valeur exacte de l'aire, en cm$^2$, de $\Delta$ ; en donner une valeur approchée au mm$^2$.