Baccalauréat STI Métropole juin 2003
Génie énergétique, génie civil, génie mécanique

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 6z + 34 = 0.$$

2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -3 + 5i$, $z_B = 3 - 55i$ et $z_C = 4i$.

a. Placer A, B et C dans le repère.

b. Calculer les modules des nombres complexes $z_A - 3$, $z_B - 3$ et $z_C - 3$. En déduire que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. Soit D le symétrique de A par rapport à C et E le symétrique de B par rapport à C. Placer les points D et E dans le repère. Montrer que ABDE est un losange.

EXERCICE 2 **5 points**

Soit (E) l'équation différentielle

$$y' + 2y = 0$$

où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a. Résoudre l'équation (E).

b. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

2. a. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0 ; 10]$.

b. Déterminer, en fonction de n, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n ; n+1]$.

3. Soit (u_n), la suite définie par $u_n = n\left(1 - e^{-2}\right)e^{-2n}$ pour tout n entier positif ou nul.

a. Calculer la valeur exacte de u_0, u_1 et u_2.

b. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c. Déterminer la valeur exacte de la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{-3 - 2x}{e^x}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

Partie A : étude de la fonction f

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$. On précisera son équation.

2. Calculer $f'(x)$, où f désigne la fonction dérivée de f.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue x : $f(x) = 0$. En déduire, en fonction de x réel, le signe de $f(x)$.

5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère indiqué.

Partie B : Détermination d'une primitive et calculs d'aire

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{2x+5}{\mathrm{e}^x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Hachurer l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = 5$.

b. Calculer la valeur, en cm^2, de cette aire, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $g(x) = -f(x)$ et on appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction g. Tracer la courbe (Γ) dans le même repère que la courbe $(\mathcal{C})$.

b. Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine compris entre les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) et les droites d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = \alpha$ (où α est un réel positif donné). Calculer, en cm^2 et en fonction de α, la valeur de $\mathcal{A}(\alpha)$.

c. Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.