Baccalauréat STI Métropole septembre 2002
Génie énergétique, civil, mécanique

EXERCICE 1 **5 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est rapporté un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Soit P le polynôme défini par $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$.

 a. Trouver la valeur du nombre réel a, tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z+2)\left(z^2 + az + 8\right)$.

 b. Résoudre alors l'équation : $P(z) = 0$.

2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2 + 2\mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{B}} = 2 - 2\mathrm{i} \quad ; \quad ;\mathrm{C} = -2.$$

 a. Donner la forme trigonométrique de z_{A}, z_{B} et z_{C}.

 b. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

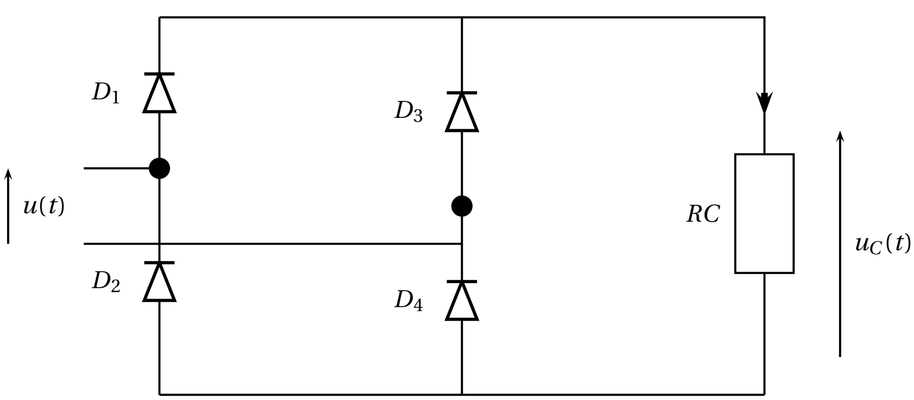
3. Soit B$'$ le point d'affixe 4i.

 a. Trouver l'affixe du point Ω milieu de [BB$'$].

 b. Montrer que les pointa B, B$'$ et C appartiennent à un cercle de centre Ω dont on déterminera le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

On désire redresser une tension sinusoïdale alternative à l'aide d'un montage redresseur à diodes :



La tension $u(t)$ est exprimée en volts et t en secondes.
La courbe représentant la tension $u(t)$ relevée à l'oscilloscope est donnée, en annexe.
L'intervalle $\left[0~;~2\cdot 10^{-2}\right]$ correspond à une période de la fonction u.

1. $u(t)$ est de la forme $u(t) = \mathrm{U}\sin(\omega t + \varphi)$, où U et ω sont des réels strictement positifs et φ un réel appartenant à $]-\pi~;~\pi]$.

On suppose, conformément à la représentation graphique de la fonction $t \longmapsto u(t)$, que $u(t)$ est nulle pour $t = 0$, pour $t = 10^{-2}$ et pour $t = 2\cdot 10^{-2}$ et que la valeur maximale de $u(t)$ est 325.

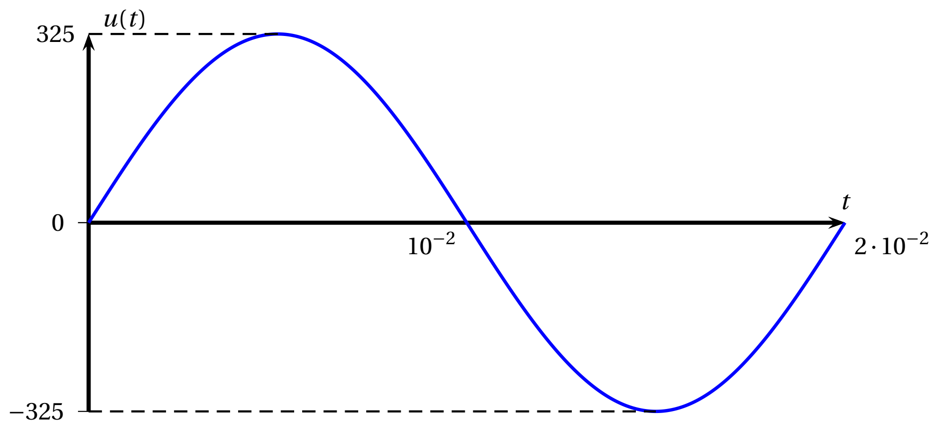
Déterminer, à l'aide de la courbe, la période T et le réel φ. On rappelle que T$= \dfrac{2\pi}{\omega}$; en déduire la valeur exacte de la pulsation ω.

2. On admet désormais que la tension $u(t)$ est donnée par $u(t) = 325\sin(100\pi t)$. La tension redressée $u_C(t)$ est telle que :
   — si $t \in \left[0\ ;\ 10^{-2}\right]$, $u_C(t) = u(t)$,
   — si $t \in \left[10^{-2}\ ;\ 2\cdot 10^{-2}\right]$, $u_C(t) = -u(t)$.

   a. Sur le dessin donné en annexe, tracer la représentation graphique de u_C sur l'intervalle $\left[0\ ;\ 2\cdot 10^{-2}\right]$. (Cette feuille est à rendre avec la copie.)

   b. Calculer la valeur moyenne de la tension redressée $u_C(t)$ sur $\left[0\ ;\ 2\cdot 10^{-2}\right]$.

Annexe à rendre avec la copie



PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$, puis étudier le signe de $g'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de g (les limites en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées).
   Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : étude de f et représentation graphique

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$. En déduire l'existence d'une droite asymptote à $\mathscr{C}$.
2. Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 5$ est te à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
4. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β ($\alpha < \beta$) sur $]0~;~+\infty[$. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune d'elles.
6. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : étude d'une aire

1. Soit H la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
   Calculer $H'(x)$.
2. Soit $\mathscr{E}$ la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ la droite Δ et les droites d'équations $x = \text{e}$ et $x = 5$. (e : base du logarithme népérien).

   Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{E}$. En donner également une valeur approchée à 1 mm^2 près.