Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie civil Métropole septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -1 - \text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -1 + \text{i} \quad ; \quad z_{\text{C}} = 1 + \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = z_{\text{B}} \times z_{\text{C}}.$$

où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_{D}.
2. **a.** Calculer le module et un argument de z_{A}, z_{B} et z_{C}.
   b. En déduire le module et un argument de z_{D}.
3. Déduire des questions **1.** et **2.b.** les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$.
4. On considère les points E et F d'affixes $z_{\text{E}} = 1$ et $z_{\text{F}} = \dfrac{1}{2}\text{i}$. Placer les points A, B, C, D, E et F dans le plan $\mathscr{P}$.
5. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que les modules de z_{A}, z_{E}, $k \times z_{\text{D}}$ et z_{F} soient, dans cet ordre, quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle

$$9y'' + y = 0,$$

   où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la solution particulière f vérifiant

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

3. Montrer que pour tout x réel, on a :

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. **a.** Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer la valeur moyenne m de f sur $[0 ; 2\pi]$. On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-3} prés.

PROBLÈME **11 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : Recherche d'une fonction

Soit g une fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c,$$

où a, b et c sont trois réels.
Déterminer a, b et c sachant que sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ passe par les points A$(1~;2)$, B $(\text{e}~;0)$ et C$\left(\text{e}^3~;~2\right)$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2.$$

1. **a.** Calculer la limite de f en 0.
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout x de $]0~;~+\infty[$, on a :
   $$f(x) = \ln x(\ln x - 3) + 2.$$
2. **a.** Montrer que :
   $$f'(x)\frac{2\ln x - 3}{x}.$$
   où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   c. Dresser le tableau de variations de f sur $]0~;~+\infty[$.
3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue X :
   $$X^2 - 3X + 2 = 0.$$
   b. En déduire les solutions exactes dans $]0~;~+\infty[$ de l'équation : $f(x) = 0$.
   c. Déduire, des questions **2.c.** et **3.b.**, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. On note Γ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point d'abscisse e.
   b. Tracer la courbe Γ et la tangente Δ.

Partie C : Primitive et calcul d'aire

1. Montrer que la fonction, définie sur $]0~;~+\infty[$, par :
   $$x \longmapsto x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 5x,$$
   est une primitive sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto (\ln x)^2 - 3\ln x$.
2. En déduire la primitive F de f sur $]0~;~+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.
3. **a.** Hachurer la partie du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \text{e}$ et $x = \text{e}^2$.
   b. Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée. On en donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.