Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie Mécanique Métropole septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}v\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit $P(z) = z^3 - 8z - 32$, où z est un nombre complexe.

1. **a.** Calculer $P(4)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$.
   c. Déterminer les réels a, b, c tels que : $P(z) = (z-4)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   d. Déduire des questions précédentes la résolution de l'équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 4 \quad ; \quad z_{\mathrm{B}} = -2 + 2\mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{C}} = -2 - 2\mathrm{i}.$$

   a. Faire une figure, sur la copie, représentant les points A, B, C dans le repère.
   b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_{B} et z_{C}.
   c. Déterminer, en justifiant, la nature du triangle OBC.
3. Soit Ω le point d'affixe $z_{\Omega} = \dfrac{2}{3}$.
   a. Déterminer les modules des nombres complexes $z_{\mathrm{A}} - z_{\Omega}$, $z_{\mathrm{B}} - z_{\Omega}$, $z_{\mathrm{C}} - z_{\Omega}$.
   b. Que représente Ω pour le triangle ABC ?

EXERCICE 2 **4 points**

Dans un atelier de réparation un technicien s'occupe des ordinateurs en panne qui lui arrivent. Les composants à l'origine de la panne peuvent uniquement être : l'alimentation, la carte graphique ou le processeur.
Une panne simultanée de deux ou trois composants est possible.
Le technicien chargé de la détection des pannes établit le diagnostic d'un ordinateur à l'aide d'un triplet utilisant les initiales des composants, surmontées d'une barre en cas de panne.
Par exemple : $(\mathrm{A}\,;\mathrm{CG}\,;\overline{\mathrm{P}})$ signifie que l'alimentation et la carte graphique fonctionnent et que la panne provient du processeur.

1. Établir la liste des sept diagnostics possibles sur un ordinateur en panne.
2. On suppose que les sept diagnostics ont la même probabilité d'être établis. Quelle est la probabilité pour qu'un seul des composants soit en panne ?
3. Le tableau suivant donne le coût des composants à remplacer :

Composant	Alimentation	Carte graphique	Processeur
Prix en €	80	160	80

Le coût d'une réparation est celui du remplacement des pièces auquel il faut ajouter un forfait de main-d'oeuvre de 25 € indépendant du nombre de composants à remplacer.

4. **a.** Soit X la variable aléatoire qui à chaque ordinateur en panne associe le coût de la réparation. Donner la liste des valeurs possibles de X.
   b. Donner dans un tableau la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X. Arrondir le résultat à l'unité.
   d. Quel devrait être le coût du forfait de la main-d'œuvre, arrondi à l'unité, pour que le prix moyen d'une réparation soit de 200 € ?

PROBLÈME **11 points**

Ce problème a pour but de montrer un exemple de courbes représentatives de deux fonctions qui sont asymptotes, puis de calculer une aire comprise entre deux courbes.

Partie A : Détermination d'une fonction

On considère la courbe représentative $\mathcal{C}$, d'une fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$, dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnée.
Cette courbe est représentée sur le document fourni en annexe.
Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses ont pour coordonnées respectives (1 ; 0) et (3 ; 0).

1. Soient a et b deux nombres réels tels que, pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$,
   $g(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x}$.
   En utilisant les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses, déterminer les nombres a et b.
2. Montrer que $g(x)$ peut s'écrire : $g(x) = x - 4 + \dfrac{3}{x}$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = x^2 + 1 - 2\ln x$.

1. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.
2. Calculer $h(1)$. En déduire que $h(x)$ est strictement positif pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C : Étude de fonction

On définit la fonction f par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1+2\ln x}{x}$$

sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On appellera Γ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal du document 1.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers zéro. En déduire que Γ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de f.
4. Courbes asymptotes. On rappelle que $g(x) = x - 4 + \dfrac{3}{x}$.
   a. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - g(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point d'intersection des courbes Γ et $\mathcal{C}$.
   c. Sur $]0\,;\,+\infty[$ déterminer la position de la courbe Γ par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.

5. Construire la courbe Γ sur le document fourni en annexe et que l'on rendra avec la copie.

Partie D : Calcul d'une aire comprise entre deux courbes

1. Montrer que $f(x) - g(x)$ admet pour primitive sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction K définie par :

$$K(x) = (\ln x - 1)^2.$$

2. Sur le document fourni en annexe, hachurer l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x = \text{e}$ et $x = \text{e}^2$.
3. Calculer la valeur de cette aire en cm^2.

Document à rendre avec la copie