Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie civil Métropole juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.
Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit trois nombres complexes

$$z_1 = \sqrt{3} + \text{i} \qquad ; \qquad z_2 = \frac{z_1^2}{2} \qquad \text{et} \quad z_3 = \frac{4}{z_2}.$$

a. Déterminer le module et un argument de z_1.

b. Écrire sous la forme $a + b\text{i}$ les complexes z_2 et z_3.

2. Soit quatre nombres complexes

$$z_A = \sqrt{3} + \text{i},\ z_B = 1 + \text{i}\sqrt{3},\ z_C = -\sqrt{3} + \text{i} \quad \text{et} \quad z_D = 1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

a. Montrer que les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_A et z_D sont sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
Tracer le cercle dans le plan complexe et placer les points A, B, C et D.

b. Calculer $|z_C - z_B|$ et $|z_D - z_A|$.

c. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$; vérifier que $\overrightarrow{CD} = -\left(\sqrt{3}+2\right)\overrightarrow{AB}$.

d. Indiquer si les propositions suivantes sont justes ou fausses ; justifier vos réponses.

- AD = BC ;
- CD = 3AB ;
- ABCD est un trapèze isocèle.

EXERCICE 2 **4 points**

Une association de randonneurs organise un repas. Elle fixe le prix de la manière suivante :

- le tarif pour un enfant âgé de 10 ans ou moins est de 5 € ;
- le tarif pour un jeune âgé de 11 à 16 ans est de 8 € ;
- dans les autres cas le tarif est de 10 €.

De plus, tout membre de l'association bénéficie d'une réduction de 20 % appliquée au tarif le concernant. Ainsi, un membre âgé de 11 à 16 ans paiera 6,40 €.
Les participants au repas, au nombre de 600, sont répartis selon le tableau ci-dessous :

Participant	10 ans ou moins	entre 11 et 16 ans	plus de 16 ans	Total
membre	50	40	110	200
non-membre	110	100	190	400
Total	160	140	300	600

Partie A

On choisit au hasard une personne ayant participé au repas.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit membre de l'association ?

2. Quelle est la probabilité qu'elle paye plus de 7 € ?
3. On considère la variable aléatoire X égale au prix du repas pour un participant choisi au hasard. Vérifier que la probabilité pour que X prenne la valeur 6,40 est égale à $\dfrac{1}{15}$.
4. Déterminer les valeurs prises par X, puis donner la loi de probabilité de X.
5. Déterminer l'espérance mathématique de X, notée $\mathrm{E}(X)$ (calculer la valeur exacte sous forme de fraction, puis une valeur décimale approchée à 0,01 près).

Partie B

Calculer la recette totale perçue par l'association à l'occasion de ce repas.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = -x + \ln(2x+2) - \ln(x+2).$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (4 cm pour une unité en abscisses et 8 cm pour une unité en ordonnées).

Préliminaires :

1. Montrer que sur $]-1\,;\,+\infty[$, $(2x+2) > 0$ et $(x+2) > 0$.
2. Étudier le signe de x^2+3x+1 sur $\mathbb{R}$ et en déduire que sur $]-1\,;\,+\infty[$, x^2+3x+1 s'annule pour une et une seule valeur α dont on donnera la valeur exacte.

Partie A : Limites et asymptotes

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. **a.** Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = -x + \ln 2 + \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.

   b. Déterminer alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   c. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

   d. Déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Partie B : étude des variations

1. Calculer la dérivée f' de f et montrer que $f'(x) = -\dfrac{x^2+3x+1}{(x+1)(x+2)}$.
2. À l'aide des résultats obtenus dans les préliminaires, étudier le signe de f' sur $]-1\,;\,+\infty[$.
3. Construire le tableau de variations de la fonction f (on se contentera d'une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de l'extremum de f).

Partie C : Représentation graphique

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle $[-0,8\,;\,-0,4]$, une solution unique notée β.

   Donner un encadrement de β à 10^{-2} près.
2. Déterminer une équation de la droite T tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

3. Reproduire et compléter le tableau suivant : (on donnera les résultats arrondis à 10^{-1} près) :

x	$-0,8$	$\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$	0	0,5	1	2
$f(x)$						

4. Représenter graphiquement la droite T, les asymptotes et $(\mathscr{C})$ dans le repère donné.