

∞ Baccalauréat STI Polynésie juin 2003 ∞
Génie énergétique, civil

EXERCICE 1

4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes les équations suivantes et donner les solutions sous forme algébrique :

a. $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b. $3z + 2 = (1 - i)z - 7 + 13i$.

2. On considère les nombres complexes :

$$z_A = 1 + i \quad ; \quad z_B = -1 + 7i \quad ; \quad z_D = -3 + 3i.$$

On appelle A, B et D leurs images respectives dans le plan.

a. Déterminer le module et un argument de z_A .

b. Montrer que $z_D = 3iz_A$ puis en déduire le module et un argument de z_D .

c. Placer les points A, B et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

3. On pose $r = |z_D - z_B|$.

a. Interpréter géométriquement le nombre r .

b. Calculer r .

c. Montrer que le triangle ABD est rectangle et isocèle.

EXERCICE 2

5 points

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 produisent le même type de pièces. La production totale journalière est de 8 000 pièces. 40% de la production provient de la machine M_1 , le reste de la machine M_2 .

Une pièce est susceptible de présenter deux types de défauts notés D_1 et D_2 .

Concernant les pièces produites par la machine M_1 :

- 3 % présentent uniquement le défaut D_1 ,
- 2 % présentent uniquement le défaut D_2 ,
- 1 % présentent les deux défauts D_1 et D_2 .

Concernant les pièces produites par la machine M_2 :

- 5 % présentent uniquement le défaut D_1 ,
- 1 % présentent uniquement le défaut D_2 ,
- 2 % présentent les deux défauts D_1 et D_2 .

1. Après l'avoir reproduit sur votre copie, compléter le tableau suivant :

| | Défaut D_1 | Défaut D_2 | Défauts D_1 et D_2 | Aucun défaut | Total |
|---------------|--------------|--------------|------------------------|--------------|-------|
| Machine M_1 | 96 | | | | |
| Machine M_2 | | 48 | | | |
| Total | | | | | 8 000 |

2. On tire au hasard une pièce parmi celles qui n'ont aucun défaut. Montrer que la probabilité qu'elle provienne de la machine M_1 est $\frac{47}{116}$.

3. On tire au hasard une pièce parmi les 8000 produites dans la journée.
Déterminer la probabilité des événements A et B suivants :
 - a. A : « La pièce n'a aucun défaut ».
 - b. B : « La pièce a au moins un défaut ».
4. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage d'une pièce parmi les 8000, associe le nombre de défauts de cette pièce.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - b. Calculer son espérance mathématique.

PROBLÈME**10 points**

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln x}{x}.$$

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

I. Première partie : étude d'une fonction auxiliaire g .

On appelle g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$. (L'étude des limites aux bornes de l'intervalle n'est pas demandée).
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

II. Deuxième partie : étude de la fonction f

1. Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Déterminer $f(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif, puis en déduire que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. Construire le tableau de variations de f .
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 1.
5. Pour tout nombre réel x strictement positif, on pose $d(x) = f(x) - (2x - 2)$.
 - a. Déterminer la limite de $d(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - b. En déduire que la droite (D), d'équation $y = 2x - 2$, est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
 - c. Déterminer la position de \mathcal{C} par rapport à (D).
6. Tracer les droites (T) et (D) puis la courbe \mathcal{C} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

III. Troisième partie : Calcul d'aire

1. On appelle h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x} \ln x$.
Déterminer une primitive H de h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. En déduire une primitive F de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. Calculer en cm^2 , la valeur exacte de l'aire \mathcal{A} du domaine plan limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

ANNEXE

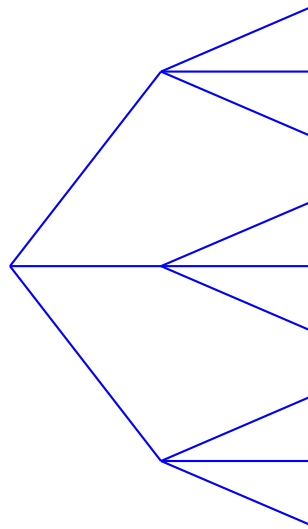


Tableau des valeurs de X

| a \ b | 0 | 1 | 2 |
|-------|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |