Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2004 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = \text{i} \quad ; \quad b = 1 - 2\text{i} \quad ; \quad c = 3 + 2\text{i} \quad ; \quad d = -1 + 4\text{i} \quad ; \quad e = -3.$$

On considère aussi l'application f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \text{i}z - 1 + \text{i}$.

1. Placer les points A, B, C, D et E clans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
2. Étude de quelques cas particuliers.
   a. Vérifier que l'image de A par f est le point A lui-même et que l'image de B est le point C.
   b. Déterminer les images de C, D et E par f.
3. Étude du quadrilatère BCDE.
   a. Calculer $\dfrac{b+d}{2}$ et $\dfrac{c+e}{2}$; qu'en déduit-on pour le quadrilatère BCDE ?
   b. Calculer $|d - b|$ et $|e - c|$. Quelle information supplémentaire obtient-on sur le quadrilatère BCDE ?
   c. Montrer BC = BE et en déduire la nature exacte du quadrilatère BCDE.

EXERCICE 2 **4 points**

Une urne opaque contient 25 boules de deux couleurs, indiscernables au toucher : 6 rouges et 19 jaunes.
Parmi les rouges, trois portent le nombre 0, deux le nombre 5 et une le nombre 10 ; parmi les jaunes, dix portent le nombre 0, cinq le nombre 1, deux le nombre 5 et deux le nombre 10.

1. On tire une boule de l'urne, au hasard ; tous les tirages sont équiprobables.
   Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   a. A : « la boule tirée ne porte pas le nombre 0 ».
   b. B : « la boule tirée est rouge et porte un nombre pair ».
   c. C : « la boule tirée est jaune ou porte un nombre impair ».
   (*Les résultats seront donnés sous forme décimale exacte*)
2. On organise une tombola.
   Pour participer à une partie, un joueur doit miser 2 euros. Il tire ensuite une boule de l'urne. Si cette boule est jaune, il reçoit une somme en euros égale au nombre inscrit sur la boule ; si elle est rouge, il reçoit une somme en euros égale au double du nombre inscrit sur la boule.
   On appelle « gain » du joueur la différence entre la somme reçue et la mise :
   Exemples :
   si le joueur tire une boule jaune portant le nombre 1, son « gain » est égal à -1 euro.
   si le joueur tire une boule rouge portant le nombre 5, son « gain » est égal à 8 euros.
   On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le « gain » du joueur.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer, en détaillant le calcul, l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
Interpréter ce résultat.

PROBLÈME **11 points**

I. Première partie

1. Découverte d'une fonction f

a. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ où y est une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

b. Déterminer la solution particulière f de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 1$.

2. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x par $g(x) = 3\mathrm{e}^{x} + 2x - 4$.
Vérifier que g est solution de l'équation différentielle $y' - y = 6 - 2x$.

II. Deuxième partie : étude de la fonction $h = f - g$

On considère la fonction h définie pour tout nombre réel x par

$$h(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} - 2x + 4,$$

et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que $h(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 3 - 2\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \dfrac{4}{\mathrm{e}^{x}}\right)$ pour tout réel x et en déduire la limite de h en $+\infty$

2. Étude en $-\infty$.

a. Déterminer la limite de h en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x + 4$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

c. On pose pour tout réel x, $d(x) = h(x) + 2x - 4$;

- Vérifier que $d(x) = \mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 3)$.
- Étudier le signe de $d(x)$ pour tout nombre réel x.
- En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

3. Étude de la dérivée de h.

a. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x et vérifier que $h'(x) = (\mathrm{e}^{x} - 2)(2\mathrm{e}^{x} + 1)$.

b. Étudier le signe de $h'(x)$ pour tout nombre réel x, en déduire les variations de h et dresser son tableau de variations ; on donnera la valeur exacte du minimum de h.

4. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-4\,;\,1,5]$.

III. Troisième partie : calcul d'une aire

On considère le domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 3$.

1. Hachurer le domaine sur le graphique précédent.

2. Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire du domaine J.