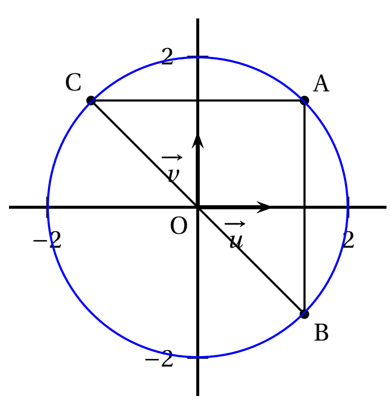
Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Polynésie juin 2009 Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. $z^2-2z\sqrt{2}+4=0 \iff \left(z-\sqrt{2}\right)^2-2+4=0 \iff \left(z-\sqrt{2}\right)^2+2=0 \iff$
$\left(z-\sqrt{2}\right)^2-\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2=0$.
L'équation a donc deux solutions complexes : $\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}$.
2. **a.** $|z_A|^2=2+2=4=2^2 \Rightarrow |z_A|=2$.
Donc on peut écrire $z_A=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
Un argument de z_A est donc $\dfrac{\pi}{4}$.
Comme $z_B=\overline{z_A}$, $|z_B|=2$ et un argument de z_B est $-\dfrac{\pi}{4}$.
b. Erreur d'énoncé : A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2. Pour A on construit la bissectrice de $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$.
3. **a.** Le produit par i de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ est une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$: un quart-de-tour.
b. On a $z_C=\mathrm{i}z_A=\mathrm{i}\left(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$.
c. On a $\dfrac{1}{2}\left(z_C+z_B\right)=0$, ce qui signifie que O est le milieu de [BC], ou encore C est le symétrique du point B autour du point O.
Plus simplement : $z_C=-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}=-\left(\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=-z_B$.
l'évaluation.
4. De la question précédente on déduit que OC = 2. La corde [BC] contient le centre du cercle O : c'est donc un diamètre. Le point A appartenant lui aussi au cercle de diamètre [BC], le triangle ABC est rectangle en A.
De plus $\left(\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{OA}\right)=-\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.
Donc dans ABC, la droite (AO) est hauteur et médiane.
Conclusion le triangle ABC rectangle est isocèle en A.



EXERCICE 2 **4 points**

1. Il y a $4 \times 4 = 16$ couples différents possibles.

(J ; J)	(J ; R)	(J ; V)	(J ; N)	(R ; J)	(R ; R)	(R ; V)	(R ; N)
(V ; J)	(V ; R)	(V ; V)	(V ; N)	(N ; J)	(N ; R)	(N ; V)	(N ; N)

2. Chaque couple a la même probabilité de sortir, donc $p(\text{N} ; \text{N}) = \dfrac{1}{16}$.

3. **a.** La jaune rapporte 20 euros et la rouge 12 euros soit en tout 32 euros moins les 20 euros de mise soit un gain de 12 euros.

b.

Tirage 1 \ Tirage 2	Rapport	J	R	V	N
Rapport		20	12	5	0
J	20	20	12	5	0
R	12	12	4	−3	−8
V	5	5	−3	−10	−15
N	0	0	−8	−15	−20

c. Deux tirages conduisent à un gain de 12 euros ; donc $p(X = 12) = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.

d.

x_i	20	12	5	4	0	−3	−8	−10	−15	−20
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

e. On a $\text{E}(X) = 20 \times \dfrac{1}{16} + 12 \times \dfrac{2}{16} + 5 \times \dfrac{2}{16} + 4 \times \dfrac{1}{16} + 0 \times \dfrac{2}{16} + (-3) \times \dfrac{2}{16} + (-8) \times \dfrac{2}{16} + (-10) \times \dfrac{1}{16} + (-15) \times \dfrac{2}{16} + (-20) \times \dfrac{1}{16} =$
$\dfrac{20 + 24 + 10 + 4 + 0 - 6 - 16 - 10 - 30 - 20}{16} = -\dfrac{24}{16} = -\dfrac{3}{2} = -1{,}50$ (€).
Cela signifie qu'en moyenne on perd 1,50 € par partie...

PROBLÈME **11 points**

PARTIE A : Étude de la fonction f

1. **a.** On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{e}^x = 0$, donc puisque $\text{e}^{2x} = (\text{e}^x)^2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{e}^{2x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$.
Ceci montre que la droite D d'équation $y = 4$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

b. On a vu que $\text{e}^{2x} = (\text{e}^x)^2$, donc en factorisant e^x dans les deux premiers termes :

$$f(x) = \text{e}^x\left(\text{e}^x - 5\right) + 4.$$

2. **a.** f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\text{e}^x \times \text{e}^x - 5\text{e}^x$. En factorisant e^x, $f'(x) = \text{e}^x(2\text{e}^x - 5)$.

b. $2\text{e}^x - 5 = 0 \iff \text{e}^x = \dfrac{5}{2} \iff x \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$. (par croissance de la fonction ln.)

$2\text{e}^x - 5 > 0 \iff \text{e}^x > \dfrac{5}{2} \iff x > \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$

c. La question précédente montre que pour $x > \ln\left(\frac{5}{2}\right)$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante.

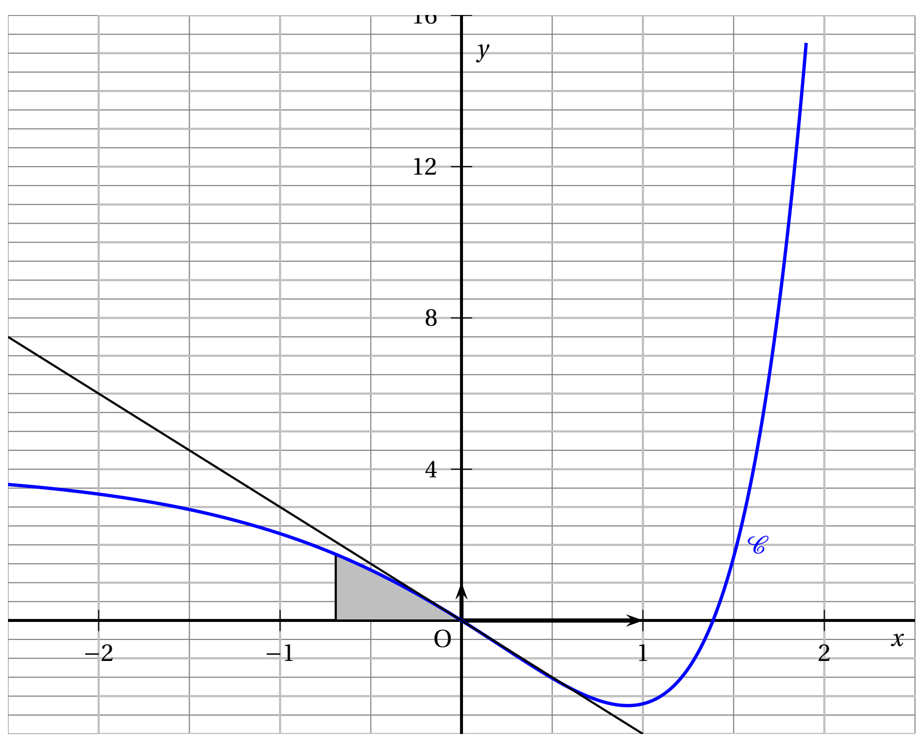
De même pour $x < \ln\left(\frac{5}{2}\right)$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante.

3. Il résulte de la question précédente que f a un minimum pour $x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ qui vaut, sachant que $\mathrm{e}^x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$, $f\left[\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right] = \left[\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} - 5\right)\right] = -\frac{25}{4} + 4 = -\frac{9}{4}$.
Or $f(1) = \mathrm{e}^2 - 5\mathrm{e} + 4 \approx -2,2 < 0$ et $f(2) = \mathrm{e}^4 - 5\mathrm{e} + 4 \approx 21,7 > 0$.
Dans l'intervalle $[1~;~2]$, la fonction f dérivable est croissante et ses valeurs appartiennent à l'intervalle $[f(1)~;~f(2)]$ qui contient 0.
Il existe donc un réel unique $\alpha \in [1~;~2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne $\alpha \approx 1,39$.

4. a. On a $f(0) = 1^2 - 5 + 4 = 0$, donc O appartient à $\mathscr{C}$

b. Le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point O est le nombre $f'(0)$.
$f'(x) = \mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x - 5\right) \Rightarrow f'(0) = 1 \times (2 - 5) = -3$.

5.



PARTIE B : Calcul d'aire

1. +Sur l'intervalle $\left[\ln\frac{1}{2}~;~0\right]$ on a vu que $f(x) \geqslant f(0)$ car f est décroissante ; or $f(0) = 0$: la fonction est donc positive sur cet intervalle.

2. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :
$F(x) = \frac{1}{2}$

2. **2.** Cf. figure

3. On a vu que sur $\left[\ln\frac{1}{2}\ ;\ 0\right]$, $f(x) \geqslant 0$. Donc l'aire $\mathscr{A}$ en unités d'aire de la surface du domaine $\mathscr{D}$ est égale à l'intégrale

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{\ln\frac{1}{2}}^{0} = F(0) - F\left(\ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 5 - \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln\frac{1}{2}} - 5\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{2}} + 4\ln\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2} - \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{2} - 4\ln 2\right) =$
$-\dfrac{19}{8} + 4\ln 2$. $\left(\text{car } \mathrm{e}^{2\ln\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}\right)$

Or une unité d'aire est égale à $4 \times 1 = 4$ cm^2.

$\mathscr{A} = 4\left(-\dfrac{19}{8} - 4\ln 2\right) = -\dfrac{19}{2} + 16\ln 2$ cm^2.

La calculatrice donne : $\mathscr{A} \approx 2,590 \approx 2,59$ cm^2.