Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie novembre 2008
Génie électronique, électrotechnique, optique

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z

$$z^2 - 10z + 41 = 0.$$

2. Pour tout nombre complexe z on pose

$$P(z) = z^3 - 7z^2 + 11z + 123.$$

a. Calculer $P(-3)$.

b. Vérifier que

$$P(z) = (z+3)\left(z^2 - 10z + 41\right).$$

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z

$$P(z) = 0.$$

3. Soit I, A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{I}} = 2 \qquad z_{\text{A}} = -3 \qquad z_{\text{B}} = 5 + 4\text{i} \qquad z_{\text{C}} = 5 - 4\text{i}$$

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2| = 5$.

a. Montrer que les points A, B et C sont dans l'ensemble $\mathscr{C}$.

b. Placer les quatre points A, B, C et I dans le plan.

c. Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

d. Représenter l'ensemble $\mathscr{C}$.

4. Soit $\mathscr{R}$ la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = z \times \text{e}^{-\frac{\pi}{4}\text{i}}.$$

a. Donner les éléments caractéristiques de la transformation $\mathscr{R}$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}'$, image du cercle $\mathscr{C}$ par la transformation $\mathscr{R}$.
Justifier la réponse et représenter l'ensemble $\mathscr{C}'$ sur la figure.

EXERCICE 2 **4 points**

Un jeu consiste à miser d'abord q euros, puis à appuyer sur un bouton. Une case de couleur s'allume alors au hasard sur le tableau ci-dessous ; à chaque jeu, chaque case a la même probabilité de s'allumer.

R	R	R	R	R	R
R	J	B	B	J	R
R	B	V	V	B	R
R	J	B	B	J	R
R	R	R	R	R	R

On convient que :
R désigne la couleur rouge
J la couleur jaune
B la couleur blanche
V la couleur verte.

- Si une case rouge s'allume, l'organisateur du jeu ne rend rien au joueur.
- Si une case blanche s'allume, l'organisateur du jeu rend la mise de q euros au joueur.
- Si une case jaune s'allume, l'organisateur du jeu donne 5 euros au joueur.
- Si une case verte s'allume, l'organisateur du jeu donne 8 euros au joueur.

1. On considère dans cette question que $q = 1$. Soit X la variable aléatoire représentant le gain relatif du joueur, obtenu en tenant compte de la mise initiale.

a. Justifier que les valeurs prises par X sont $\{-1 ; 0 ; 4 ; 7\}$.

b. Montrer que la probabilité pour que le gain relatif du joueur soit égal à 4 est :

$$P(X = 4) = \frac{2}{15}$$

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X à l'aide d'un tableau.

2. On considère dans cette question que q est un nombre positif quelconque.
Quelle devrait être la mise q pour que le jeu soit équitable ?
Toute justification ou toute explication, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.

PROBLÈME **11 points**

Partie I : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \ln x + 2x^2.$$

1. Montrer que

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
Dresser le tableau de variation de la fonction g (sans les limites).

3. En déduire que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $g(x)$ est strictement positif.

Partie II : étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2x - 3.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étudier la limite de f en 0. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse e et B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\sqrt{\text{e}}$.
   a. Donner les valeurs arrondies au centième des coordonnées des points A et B.
   b. En déduire que la fonction f est positive sur l'intervalle $[\sqrt{\text{e}}~;~\text{e}]$.
6. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$. Placer les points A et B.
7. **a.** Démontrer qu'au point A, la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ.
   b. Le point A est-il le seul point de la courbe $\mathcal{C}$ admettant une tangente parallèle à la droite Δ?

Partie III calcul d'aire

1. Soit K la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

   $$K(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

   On note K' la fonction dérivée de la fonction K. Calculer $K'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \sqrt{\text{e}}$ et $x = \text{e}$.
   a. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.
   b. Donner une valeur approchée au mm^2 près de l'aire $\mathcal{A}$.
   c. Retrouver une valeur approximative de ce résultat en calculant l'aire en mm^2 d'un trapèze à préciser.