Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles-Guyane 20 juin 2012
Génie électronique, électrotechnique & optique

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan est muni du repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3 - \text{i}\sqrt{3}$ et $z_B = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}z_A$.

1. a. Recopier et compléter la phrase suivante :

« Le point B est l'image du point A par ...... de centre ...... et ...... $\dfrac{\pi}{4}$.

b. Que peut-on en déduire pour la nature du triangle OAB ? Justifier.

2. a. Donner la forme algébrique de $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

b. Vérifier que

$$z_B = \frac{\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{2} + \text{i}\frac{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{2}.$$

3. a. Déterminer la forme trigonométrique de z_A.

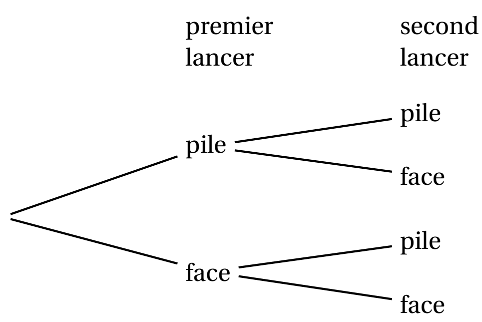
b. Vérifier que $z_B = 2\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}}$.

4. À l'aide des questions 2. et 3. donner la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Un joueur participe à un jeu de hasard où il lance plusieurs fois une pièce de monnaie. Pour gagner, le joueur doit obtenir pile à tous ses lancers. Le nombre de lancers est fixé au début de chaque partie. La pièce de monnaie utilisée est parfaitement équilibrée, de sorte qu'à chaque fois qu'elle est lancée, la probabilité d'obtenir pile est égale à la probabilité d'obtenir face.

1. Dans cette question, la pièce est lancée deux fois.
Les issues de cette expérience sont représentées par l'arbre ci-dessous.



a. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

b. On considère l'évènement A : « les résultats des deux lancers sont identiques ».
Quelle est la probabilité de l'évènement A ?

c. On considère l'évènement B : « le résultat face a été obtenu au moins une fois ».
Décrire par une phrase l'évènement $\overline{B}$, évènement contraire de l'évènement B.
En déduire la probabilité de l'évènement B.

2. Dans cette question, la pièce est lancée trois fois.

Le joueur gagne 100 euros s'il obtient trois fois pile. Si le joueur n'obtient pas trois fois pile, il perd 1 euro. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 100 si le joueur gagne et la valeur -1 si le joueur perd.

a. Représenter à l'aide d'un arbre les issues de cette expérience aléatoire.

b. Donner la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Dans cette question, la pièce est lancée n fois, n étant un nombre entier naturel non nul.

Le joueur gagne 100 euros s'il obtient n fois pile ; sinon le joueur perd 1 euro. Soit Y_n la variable aléatoire prenant la valeur 100 si le joueur gagne et la valeur -1 si le joueur perd.

L'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_n est notée $E(Y_n)$.

On admet que la probabilité que Y_n prenne la valeur 100 vaut $\dfrac{1}{2^n}$.

a. Déterminer $E(Y_n)$, en fonction de n.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $E(Y_n) < 0$.

c. Interpréter ce résultat.

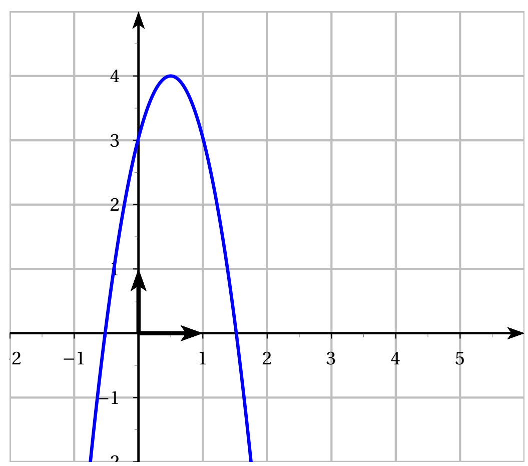
PROBLÈME — 11 points

Partie A : signe d'une fonction

La parabole $\mathscr{P}$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction polynôme t définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$t(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.



Le point $S\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 4\right)$ est le sommet de la parabole $\mathscr{P}$.
Le point $A(0\ ;\ 3)$ appartient à la parabole $\mathscr{P}$.

1. Justifier que $c = 3$.

2. Justifier que $t\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4$ et en déduire une relation entre a et b.

3. Soit t' la fonction dérivée de la fonction t sur $\mathbb{R}$.
Justifier que $t'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et en déduire une seconde relation entre a et b.

4. Montrer que les questions 2. et 3. conduisent au système (S) : $\begin{cases} a+b &= 0 \\ a+2b &= 4 \end{cases}$

Résoudre le système (S). En déduire une écriture de la fonction t.

5. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x+1)(3-2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $g(x) = t(x)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Déterminer le signe de la fonction g.

Partie B : étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x^2+4x+1)\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra utiliser que pour tout nombre réel x, on a $f(x) = \dfrac{4x^2}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$).

En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$; on précisera de quelle droite il s'agit.

3. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = g(x)$, où g désigne la fonction définie à la question 5 de la partie A.

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

5. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie C : calcul d'aire

1. On admet que la fonction H, définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-4x^2-12x-12)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4x^2+2x)\mathrm{e}^{-x}$.

En remarquant que pour tout réel x, on a $f(x) = h(x) + \mathrm{e}^{-x}$, déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On appelle $\mathscr{D}$ la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.

a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique.

b. Calculer la valeur exacte en cm² de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.