Baccalauréat STI Antilles juin 2000
Génie civil, énergétique, mécanique (A et F)

Durée : 4 heures — Coefficient : 4

EXERCICE 1 — **4 points**

Chacun des 150 élèves des classes de terminales STI d'un lycée ayant effectué un stage en entreprise a rédigé un rapport de stage.
Pour rendre ce rapport de stage le plus lisible et le plus attractif possible :

- 115 élèves ont utilisé un traitement de textes;
- 100 élèves ont utilisé un tableur;
- 75 élèves ont utilisé à la fois un traitement de textes et un tableur.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre d'élèves	ayant utilisé un traitement de textes	n'ayant pas utilisé un traitement de textes	Total
ayant utilisé un tableur	75		100
n'ayant pas utilisé de tableur			
Total	115		150

2. Un professeur étudie un des 150 rapports de stage choisi au hasard. On suppose que chaque rapport de stage a la même probabilité d'être ainsi choisi. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants

A : « l'élève ayant rédigé ce rapport de stage n'a pas utilisé de tableur »;

B : « l'élève ayant rédigé ce rapport de stage a utilisé un traitement de textes mais pas de tableur »;

C : « l'élève ayant rédigé ce rapport de stage n'a utilisé ni un traitement de textes, ni un tableur ».

EXERCICE 2 — **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$; on rappelle que $\text{i}^2 = -1$.

On considère les points A(4 ; 0) et C$\left(-2\sqrt{3} ; -2\right)$ d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 4$ et $z_{\text{C}} = -2\sqrt{3} - 2\text{i}$, et les points B et D d'affixes respectives $z_{\text{B}} = \text{i}z_{\text{A}}$ et
$z_{\text{D}} = \text{i}z_{\text{C}}$.

1. **a.** Calculer les modules des nombres complexes z_{A} et z_{C}.

b. En déduire les modules des nombres complexes z_{B} et z_{D}.

c. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2. **a.** Montrer que les coordonnées de B et D sont respectivement (0; 4) et $\left(2 ; -2\sqrt{3}\right)$.

b. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

3. **a.** Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

b. Montrer que les diagonales du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires.

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est d'étudier la position relative d'une courbe et d'une tangente à cette courbe en un point, et de calculer l'aire d'un domaine plan.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm.

Sur la figure ci-après a été tracée la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f, définie pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~6]$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x} + \ln x.$$

Partie A - étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $]0~;~6]$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x} + \ln x.$$

1. Calculer la limite de f en zéro. On pourra mettre $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{x+2+x\ln x}{x}.$$

2. Calculer (1), $f(2)$, $f(\text{e})$, $f(4)$ et $f(6)$.
3. **a.** Vérifier que, pour tout x dans l'intervalle $]0~;~6]$, on a :

$$f'(x) = \frac{x-2}{x^2}.$$

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0~;~6]$.
   c. Établir le tableau de variations de f sur $]0~;~6]$.

Partie B - Position de la courbe par rapport à une tangente

1. Montrer qu'une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 4 est :

$$y = \frac{x}{8} + 1 + \ln 4.$$

2. On considère la fonction g définie sur $]0~;~6]$ par :

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{x}{8} + 1 + \ln 4\right).$$

   a. Vérifier que pour tout x de $]0~;~6]$: $g(x) = \ln x - \ln 4 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{8}$.
   b. Montrer que pour tout x de $]0~;~6]$: $g'(x) = \dfrac{-x^2+8x-16}{8x^2}$.
   c. Déterminer le signe de $g'(x)$ sur $]0~;~6]$.
   d. Préciser le sens de variation de g sur $]0~;~6]$ (on ne demande pas les limites aux bornes du domaine de définition).
   e. Calculer $g(4)$ et en déduire le signe de g sur $]0~;~6]$.

3. En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et T.
4. Tracer la droite T dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ de la figure.

Partie C - Calcul d'une aire

1. Soit la fonction H définie sur $]0\,;\,6]$ par :

$$H(x) = (2 + x)\ln x.$$

Calculer $H'(x)$.

2. On considère la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$. On appelle $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, de cette partie du plan.

a. Hachurer cette partie sur la figure.

b. Donner la valeur exacte de $\mathcal{A}$ puis sa valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.