Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, énergétique, civil
La Réunion juin 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient six billets numérotés de 1 à 6.

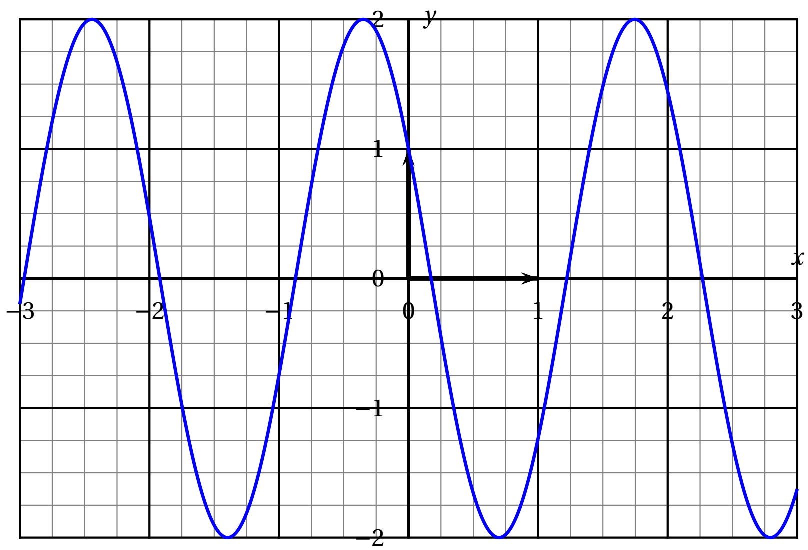
On tire au hasard deux billets successivement et sans remise. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Chaque tirage peut être modélisé par un couple $(a\,;\,b)$ de deux nombres distincts. Par exemple le tirage du billet numéroté 3 suivi du billet numéroté 5 sera noté $(3\,;\,5)$.
   - **a.** Justifier qu'il y a 30 couples possibles.
   - **b.** Soit A l'évènement : « les deux numéros tirés sont pairs ».
     Vérifier que la probabilité de A est égale à $\dfrac{1}{5}$.
   - **c.** Calculer la probabilité de l'évènement B : « au moins l'un des numéros est impair ».
2. Soit D la variable aléatoire, qui à chaque tirage associe la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres du couple. Ainsi au couple $(3\,;\,5)$ comme au couple $(5\,;\,3)$ la variable aléatoire D associe le réel $5 - 3 = 2$.
   - **a.** Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire D ?
   - **b.** Calculer les probabilités $P(D = 1)$ et $P(D = 3)$.
   - **c.** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire D.
   - **d.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire D.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = 0$, où y est une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. La courbe $\mathscr{C}$, donnée ci-dessous, représente une solution particulière notée f de l'équation différentielle (E). La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $\text{A}(0\,;\,1)$ et le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$ est égal à $-3\sqrt{3}$.
   - **a.** En déduire les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f'(0)$.
   - **b.** Déterminer cette solution particulière f.
   - **c.** Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
3. **a.** Montrer que $\dfrac{7\pi}{18}$ et $\dfrac{13\pi}{18}$ sont deux solutions de l'équation, d'inconnue x, $f(x) = 0$.
   Déterminer deux autres solutions de cette équation.
   - **b.** Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[\dfrac{7\pi}{18}\,;\,\dfrac{13\pi}{18}\right]$.



PROBLÈME **12 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4 - \mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

Partie A : étude d'une fonction

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe $\mathscr{C}$ et donner son équation.
2. **a.** Déterminer la dérivée f' de la fonction f et justifier son signe sur $\mathbb{R}$.
   b. Donner le tableau de variations de f.
3. **a.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x, $f(x) = 0$.
   b. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ défini ci-dessus.

Partie B : Résolution d'une équation

Soit (E) l'équation d'inconnue réelle x : $f(x) = 2x + 3$.

1. Vérifier que $x = 0$ est une solution de (E).
2. **a.** Tracer la droite D d'équation $y = 2x + 3$ sur le même graphique que la courbe $\mathscr{C}$.
   b. Justifier graphiquement l'existence d'une deuxième solution notée α de l'équation (E). Placer α sur l'axe des abscisses.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie C : Calcul d'une aire

1. Hachurer le domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de ce domaine plan.

2. **a.** Vérifier que $\mathscr{A} = 8\displaystyle\int_{\alpha}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Calculer $\mathscr{A}$ en fonction de α.

c. En utilisant l'équation (E) de la **partie B**, justifier que $\mathrm{e}^{-\alpha} = 1 - 2\alpha$.
En déduire que $\mathscr{A} = -16\alpha$.

d. à l'aide du résultat obtenu dans la **partie B**, déterminer une valeur de $\mathscr{A}$ arrondie au dixième.