Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie civil Métropole septembre 2009

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 — 4 points

Ceci est un QCM. Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C, ou D est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande *aucune justification.*
NOTATION : *Chaque réponse juste rapporte un point, une réponse fausse coûte* $0,25$ *point. Une absence de réponse ne rapporte ni ne coûte de point.*
Si la note globale de l'exercice est négative, elle est ramenée à zéro.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

1. $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

Réponse A : $f(x) = \cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x$ — Réponse B : $f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{1}{3}x + \sin\frac{1}{3}x$

Réponse C : $f(x) = \cos\frac{1}{9}x + \sqrt{3}\sin\frac{1}{9}x$ — Réponse D : $f(x) = \cos\frac{1}{3}x + \sqrt{3}\sin\frac{1}{3}x$.

2. f est solution de l'équation différentielle :

Réponse A : $y'' - 9y = 0$ — Réponse B : $9y'' + y = 0$

Réponse C : $y'' + 3y = 0$ — Réponse D : $y'' + \frac{1}{3}y = 0$.

3. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ est :

Réponse A : $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ — Réponse B : $\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$ — Réponse C : $\dfrac{3}{\pi}$ — Réponse D : $-\dfrac{\pi}{2}$.

4. La solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ est :

Réponse A : $\dfrac{5\pi}{6}$ — Réponse B : $\dfrac{5\pi}{2}$ — Réponse C : $\dfrac{\pi}{6}$ — Réponse D : $-\dfrac{\pi}{2}$

EXERCICE 2 — 4 points

Dans une usine, le tableau de production de deux chaînes de montage est le suivant :

Mois	Productions mensuelles chaîne A	Productions mensuelles chaîne B	N° de rang des productions
Janvier 2009	2 056	1 770	1
Février 2009	2 069	1 805	2
Mars 2009	2 082	1 840	3
Avril 2009	2 095	1 875	4

Les productions forment des suites arithmétiques.

1. **a.** Quelle est la raison de la suite pour la chaîne A ? Justifier.

b. Quelle est la raison de la suite pour la chaîne B ? Justifier.

2. En supposant que l'une des productions mensuelles de la chaîne B soit 2 050, quel serait alors son numéro de rang ?

3. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par A_n et B_n les productions mensuelles respectives de rang n des chaînes A et B.

a. Exprimer A_n en fonction de n et de A_1.

b. Exprimer B_n en fonction de n et de B_1. Retrouver ainsi le résultat de la question 2.

c. À partir de quelle date (mois et année), la production de la chaîne B sera-t-elle supérieure ou égale à celle de la chaîne A ?

PROBLÈME **12 points**

Les objectifs de ce problème sont :

— l'étude de quelques propriétés d'une fonction f et de sa courbe représentative,

— un calcul d'aire entre deux courbes.

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x^2 + x + \mathrm{e}^{-x}$,
où y est une fonction de la variable réelle x et y' sa dérivée.
Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = (x+k)\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1,$$

où k désigne une constante réelle.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Montrer que la fonction f est solution de l'équation (E).

3. Déterminer le réel k pour que $f(0) = 1$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{P}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)]$. Interpréter graphiquement ce dernier résultat.

c. Étudier sur $\mathbb{R}$ la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

2. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x) + 2x - 1$.

b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

3. Sur la feuille annexe :

a. Compléter le tableau de valeurs arrondies au centième.

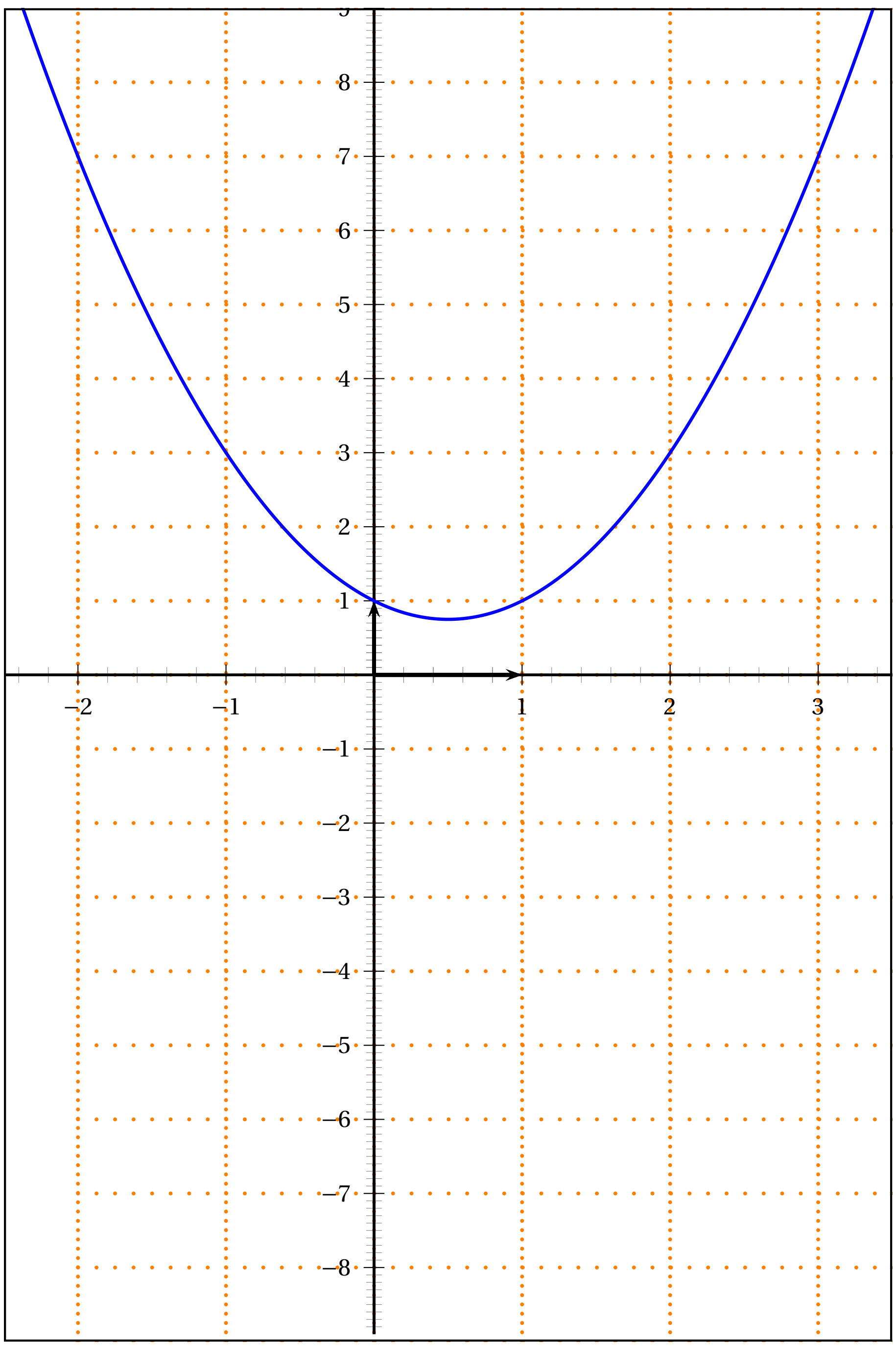
b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le cadre où a déjà été tracée la courbe $\mathscr{P}$.

Partie C

1. Démontrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x-1)\text{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\text{e}^{-x}$.
2. Soit A la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$ où α est un nombre réel supérieur ou égal à 2.
   a. Colorier la partie A sur la feuille annexe dans le cas particulier où $\alpha = 2$.
   b. Pour $\alpha \geqslant 2$ quelconque, déterminer l'aire de la partie A en fonction de α, en unités d'aire puis en cm^2.
   c. Calculer $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \left(-\alpha\text{e}^{-\alpha} - \text{e}^{-\alpha} + 1\right)$.
   d. Quelle est la limite de l'aire de A en cm^2 lorsque α tend vers $+\infty$?

FEUILLE ANNEXE À RENDRE OBLIGATOIREMENT AVEC LA COPIE

x	-2	$-1,5$	$-1,1$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$												


8
7
6
5
4
3
2
1
−2
−1
1
2
3
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8