Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole septembre 2005
Génie mécanique, civil, énergétique

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **4 points**

1. Soit (E) l'équation différentielle

$$y' = -\frac{1}{a}y$$

   où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et a une constante réelle non nulle. Résoudre cette équation.

2. Déterminer la solution p de (E) qui vérifie $p(0) = 1$.
3. La pression atmosphérique de l'air (en bar) à l'altitude x (en mètre) au-dessus du niveau de la mer est donnée par

$$p(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}.$$

   a. Déterminer la constante a sachant que la pression au sommet de l'Éverest à l'altitude $x = 8\,848$ est de $0,331$ bars.
   On arrondira a à l'entier le plus proche.

   b. On prend $a = 8\,003$. On mesure, en un lieu, une pression atmosphérique de $0,548$ bars, Calculer l'altitude du lieu.

EXERCICE 2 **5 points**

On désigne pat i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -1 - \mathrm{i}, \qquad z_{\mathrm{B}} = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = 7 - \mathrm{i}.$$

1. **a.** Écrire z_{B} sous forme algébrique.
   b. Placer les points A, B et C dans le plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminer les longueurs AB, AC, BC et en déduire la nature du triangle ABC.
3. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un carré.
4. Soit I le point d'affixe $z_{\mathrm{I}} = 3 - \mathrm{i}$.
   On considère l'ensemble (E) des points M de $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie

$$|z - (3 - \mathrm{i})[= 4.$$

   a. Les points A, B, C et D appartiennent-ils à (E) ?
   b. Quelle est la nature de (E) ?
   c. Tracer l'ensemble (E).

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{x^2} + 1.$$

1. **a.** Montrer que la dérivée g' de la fonction g est définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g'(x) = \frac{x^2+2}{x^3}.$$

   b. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** Calculer $g(1)$.

   b. En déduire que $\left\{\begin{array}{lll} g(x) > 0 & \text{pour} & x > 1 \\ g(x) < 0 & \text{pour} & 0 < x < 1. \end{array}\right.$

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln x + \frac{1}{x}.$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** On admet que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$; déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ; en déduire que Γ admet une asymptote verticale que l'on précisera.

   b. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. **a.** Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f'(x) = g(x).$$

   b. À partir des résultats de la **partie A** dresser le tableau de variations de f.

3. Tracer la courbe Γ.

Partie C

Soit H la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$H(x) = \frac{x^2}{2}\ln x + \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

1. Comparer $H'(x)$ et $f(x)$. En déduire une primitive de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x = \frac{\text{e}^2+5}{4}$.
3. Calculer l'aire exprimée en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $= \text{e}$.
   On donnera la valeur exacte, puis approchée à 1 mm^2 près par excès.