Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole septembre 2008

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **6 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$Z^2 + 2Z + 4 = 0.$$

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
La figure sera complétée au fur et à mesure que l'énoncé le demandera.
Soit les points A, B et C d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 + i\sqrt{3}, \quad Z_B = \overline{Z_A} \text{ et } Z_C = 2.$$

On rappelle que $\overline{Z_A}$ représente le nombre complexe conjugué de Z_A.

2. **a.** Calculer le module et un argument du nombre complexe Z_A.
   b. En déduire le module et un argument du nombre complexe Z_B.
   c. Placer les points A, B et C sur la figure.
   d. Démontrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral.
3. Soit D le point d'affixe Z_D définie par : $Z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}} Z_B$.
   a. Déterminer l'écriture algébrique de Z_D.
   b. Placer le point D sur la figure.
   c. Quelle est la nature du quadrilatère BDAO ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans une usine, deux chaînes de montage A et B fabriquent les mêmes types d'objets. La chaîne A en fabrique trois fois plus que la chaîne B. 7 % de la production de la chaîne A est défectueuse contre 2 % pour la chaîne B.

Partie I

1. On considère une production de 1200 objets.
   Reproduire et compléter le tableau suivant :

	chaîne A	chaîne B	total
nombre d'objets défectueux	63		
nombre d'objets non défectueux			
total			1200

2. On prélève au hasard un objet dans la production de l'usine et on admet que les tirages sont équiprobables.
   a. Déterminer la probabilité que l'objet prélevé soit à la fois défectueux et produit par la chaîne A.
   b. Déterminer la probabilité que l'objet prélevé ne soit pas défectueux.

Partie II

Un objet défectueux peut présenter 1, 2 ou 3 défauts.
Soit X la variable aléatoire qui, à un objet prélevé au hasard dans la production, associe le nombre de défauts.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,9425	0,0318	$\cdots$	0,006

1. Reproduire sur la copie puis compléter le tableau précédent.
2. Le prix de vente d'un objet dépend du nombre de défauts qu'il présente :

nombre de défauts	0	1	2	3
prix de vente en €	56	15	10	1

   Soit Y la variable aléatoire qui, à un objet prélevé au hasard dans la production, fait correspondre son prix de vente.
   a. Déterminer la loi de probabilité de Y.
   b. Calculer l'espérance mathématique de Y. Interpréter le résultat obtenu.

PROBLÈME **9 points**

Étude de l'énergie fournie par le rayonnement solaire

Le but de ce problème est d'étudier le rayonnement solaire en un point de la surface de la Terre dont la latitude est 45°N et l'altitude 900 m.
Dans les questions **1.**, **2.** et **3.**, on étudie le rayonnement solaire un 21 mars ensoleillé sur un plan perpendiculaire au rayonnement solaire d'une surface de 1 m^2.

1. On suppose d'abord que le rayonnement solaire exprimé en W/m^2 est donné en fonction de l'inclinaison θ du soleil (θ étant exprimé en degrés) par

$$p(\theta) = 1230\mathrm{e}^{\frac{-1}{3,8\sin(\theta+1,6)}}.$$

   On attire l'attention du candidat quant à l'utilisation de la calculatrice pour ces calculs : dans la formule ci-dessus le sinus porte sur un angle exprimé en degrés.
   Compléter le duplicata du tableau 1 ci-dessous, fourni en annexe (à joindre à la copie).

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h
inclinaison θ du soleil (en °)	0	10,5	20,7	30	37,7	43	45	43	37,7	30	20,7	10,5	0
rayonnement solaire $p(\theta)$ (en W/m^2)		350		744			856						

Tableau 1

2. On veut maintenant modéliser l'évolution du rayonnement solaire en fonction de l'heure.

On définit la variable t comme étant le temps écoulé depuis le lever du soleil, qui se produit à 6 heures. Pour des raisons de symétrie entre le matin et l'après-midi, on se limitera à faire varier t dans l'intervalle $[0\,;\,6]$, ce qui correspond à des heures solaires variant entre 6 h et 12 h.

On admet que le rayonnement solaire (en W/m^2) peut être exprimé en fonction de t par :

$$f(t) = 856\left(1 - \mathrm{e}^{-0,6t}\right).$$

a. Compléter le duplicata du tableau 2 ci-dessous, fourni en annexe (à joindre à la copie).

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h
temps t (en heures)	0	1	2	3	4	5	6
rayonnement solaire $f(t)$ (en W/m^2)				715			833

Tableau 2

b. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.

Calculer $f'(t)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

d. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal (2 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 100 unités en ordonnée).

e. Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer $\mathscr{T}$ dans le même repère que $\mathscr{C}$.

f. Les dernières lignes des tableaux 1 et 2 vous paraissent-elles cohérentes ?

3. La quantité d'énergie solaire E, exprimée en Wh, reçue au cours de la journée, est donnée par :

$$\mathrm{E} = 2\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = 1712\int_0^6 \left(1 - \mathrm{e}^{-0,6t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer la valeur exacte de E puis fournir la valeur arrondie à l'unité.

4. On s'intéresse maintenant à l'énergie solaire reçue sur une année.

Un logiciel de météorologie fournit une énergie solaire annuelle égale à 1206 kWh, toujours pour une surface de 1 m^2.

a. Vérifier que cette valeur correspond environ à 161 journées telles que celle étudiée aux questions **1., 2.** et **3.**.

b. On suppose qu'un dispositif de production d'énergie électrique reçoit l'énergie solaire sur une surface de 1 km^2 et qu'il convertit 20 % de cette énergie en électricité.

Combien d'habitants auraient leur consommation électrique domestique fournie par ce dispositif, sachant qu'un habitant consomme en moyenne 700 kWh/an d'énergie électrique domestique (hors chauffage) ?

ANNEXE RELATIVE AU PROBLÈME

(à rendre avec la copie)

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h
inclinaison θ du soleil (en °)	0	10,5	20,7	30	37,7	43	45	43	37,7	30	20,7	10,5	0
rayonnement solaire $p(\theta)$ (en W/m^2)		350		744			856						

Tableau 1

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h
temps t (en heures)	0	1	2	3	4	5	6
rayonnement solaire $f(t)$ (en W/m^2)				715			833

Tableau 2