Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie 8 juin 2005 ∾ Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

I. Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 - 2z^2 + 25z - 50 = 0.$$

1. Vérifier que 2 est solution de l'équation (E).
2. En déduire que (E) peut s'écrire $(z-2)\left(\alpha z^2 + \beta z + \gamma\right) = 0$ où $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont trois nombres réels que l'on déterminera.
3. Résoudre alors l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. Étude d'une configuration du plan

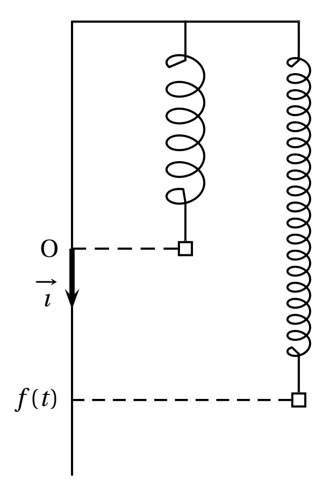
1. Dans un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm, placer les points A et B d'affixes respectives $a = 2$ et $b = 5\text{i}$.
2. Soit M le milieu du segment [AB]. Placer M dans le repère et déterminer son affixe m.
3. Soit P le point d'affixe $p = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
   Donner l'écriture algébrique de p et placer P dans le repère.
4. Démontrer que le triangle BMP est rectangle et isocèle.

EXERCICE 2 **5 points**

Un mobile, de masse 1 kg, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k = 9$ N/m.
Si l'on écarte le mobile de sa position d'équilibre O, il effectue des oscillations autour de cette position.

À chaque instant t, la position du mobile est repérée par son abscisse $f(t)$ dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\right)$.
Les lois de la Physique montrent que la fonction f est solution de l'équation différentielle
(E) : $\dfrac{1}{9}y'' + y = 0$.

1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle (E).
2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le mobile est au point $f(0) = 0,5$ m et a une vitesse initiale $f'(0) = 1,5$ m/s.
   Montrer que la fonction f est définie par :
   $f(t) = \dfrac{1}{2}(\cos 3t + \sin 3t)$.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel t : $f(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Résoudre l'équation $f(t) = 0$ dans l'intervalle $[0\ ;\pi]$.
5. à partir de l'instant $t = 0$, au bout de combien de temps le mobile repassera-t-il pour la première fois à sa position d'équilibre? (On donnera la réponse arrondie au millième de seconde.)



PROBLÈME **10 points**

Partie A Préliminaires

On appelle f la fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont deux nombres réels , qu'on se propose de déterminer.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.

1. Sachant que $\mathscr{C}$ passe par Ie point A de coordonnées $(0~;~2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. En déduire que $a = 1$ et que $b = 2$.

Partie B Étude de la fonction f

1. Étude des limites
   - **a.** Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   - **b.** En déduire la présence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ et en donner une équation.
2. Étude des variations de f
   - **a.** Déterminer la dérivée f' de f, puis étudier son signe.
   - **b.** Dresser le tableau de variations de f.
3. Étude d'un problème de tangente
   - **a.** Déterminer une équation de la droite (T), tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.
   - **b.** Factoriser l'expression $f(x) - x\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2$ et en déduire son signe.
   - **c.** En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente (T).
4. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ les tangentes et asymptote connues puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C Un calcul de volume

Soit $\mathscr{S}$ le solide obtenu par rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe $\left(\mathrm{O}~\vec{\imath}\right)$, sur l'intervalle $[0~;~3]$.
On se propose de calculer le volume $\mathscr{V}$ du solide $\mathscr{S}$.
On rappelle que $\mathscr{V} = \displaystyle\int_0^3 \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ en unités de volume.

1. Soient g et G les fonctions définies pour tout nombre réel x par :

   $$g(x) = (x+2)^2\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{et} \quad G(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{13}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}.$$

   Montrer que G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathscr{V}$ en cm^3. (On donnera la valeur exacte du résultat puis une valeur arrondie au mm^3).