Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2008 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **4 points**

Un jeu est organisé de la manière suivante : le joueur mise 3 €, puis fait tourner une roue partagée en 6 secteurs circulaires. Lorsque la roue s'immobilise, un repère situé devant la roue indique le secteur circulaire désigné. On suppose que la roue est lancée suffisamment vite pour que la position du repère corresponde à un tirage aléatoire; la probabilité que le repère indique un secteur donné est donc proportionnelle à l'angle au centre de ce secteur.

Sur chacun des secteurs circulaires est affichée une somme que le joueur reçoit :

— le secteur 1 mesure 150° et indique la somme 0 € : le joueur ne reçoit rien;
— le secteur 2 mesure 100° et affiche 3 €;
— le secteur 3 mesure 50° et affiche 4 €;
— le secteur 4 mesure 35° et affiche 6 €;
— le secteur 5 mesure 15° et affiche 10 €;
— le secteur 6, qui et le dernier, mesure 10° et affiche 15 €.

On appelle « gain » du joueur la somme, positive ou négative, que le joueur obtient après le lancer de la roue : cette somme prend en compte la mise de 3 €. Ainsi, par exemple le gain correspondant au secteur 5 est égal à 7 €.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un gain d'au moins 3 €?
3. **a.** Calculer l'espérance mathématique de la variable X.
   b. Le jeu est-il équitable?
4. Dans cette question, les cinq premiers secteurs sont inchangés, mais le sixième affiche une somme de a € où a est un nombre réel positif. On note encore X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur.
   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable X en fonction du réel a.
   b. Déterminer la valeur de a pour que cette espérance soit nulle.

EXERCICE 2 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
L'unité graphique est 1 cm; on construira une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

1. On note A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}},\ b = 5 - 3\text{i} \text{ et } c = 11 + 4\text{i}.$$

   a. Écrire le nombre complexe a sous forme algébrique.
   b. Placer les points A, B et C sur la figure.

2. Démonter que le triangle ABC est isocèle.
3. Soit z un nombre complexe quelconque et M le point du plan d'affixe z.
   a. Donner une interprétation géométrique des nombres $|z-a|$ et $|z-b|$.
   b. Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que l'on ait
   $|z-a| = |z-b|$.
   Tracer cet ensemble Δ sur la figure,
   c. On note D le point d'affixe $d = 6+\text{i}$. Les points C et D appartiennent-ils à l'ensemble Δ ?
4. Démontrer que le triangle ABD est rectangle.
5. On considère le point H tel que ADBH soit un carré. Déterminer l'affixe h de ce point H.

PROBLÈME **12 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x} - \ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; la courbe $\mathscr{C}$ est donnée en annexe.

Partie A - Étude de la fonction *f*

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On rappelle le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.
   a. En remarquant que $f(x) = \dfrac{2x-1-x\ln x}{x}$ déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   b. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ et en donner une équation.
3. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ on a : $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$.
   b. Déterminer le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. Indiquer la valeur de l'extremum.
4. a. Démontrer que, sur l'intervalle $[0{,}1~;~10]$, la fonction f s'annule pour deux valeurs exactement. On note x_1 et x_2 ces deux valeurs, avec $x_1 < x_2$.
   b. Placer x_1 et x_2 sur l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}\right)$ représenté sur la feuille annexe, et donner les valeurs approchées arrondies au centième de ces deux nombres.

Partie B - Étude d'une tangente

On désigne par $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

1. Démontrer qu'une équation de la droite $\mathscr{T}$ est : $y = -\dfrac{1}{4}x + 2 - \ln 2$.
2. On considère la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{4}x + 2 - \ln 2\right).$$

   a. Calculer $h'(x)$ et vérifier que pour tout x de $]0~;~+\infty[$, on a : $h'(x) = \dfrac{(x-2)^2}{4x^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Calculer $h(2)$ et en déduire le signe de la fonction h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente $\mathscr{T}$.

4. Tracer la droite $\mathscr{T}$ sur la feuille annexe en tenant compte du résultat obtenu dans la question précédente.

Partie C Calcul d'une aire

1. On note G la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$G(x) = x - x\ln x.$$

Calculer $G'(x)$.

2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$

3. On considère la partie du plan comprise entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = 6$ d'une part, entre l'axe horizontal et la courbe $\mathscr{C}$ d'autre part. On note $\mathscr{A}$ l'aire de cette partie de plan, exprimée en unités d'aire.

a. Hachurer cette partie de plan sur la feuille annexe,

b. Donner la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, puis sa valeur arrondie au centième.

Annexe : tracé de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

Cette feuille est à compléter au fil des questions et à rendre avec la copie