Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie des matériaux Métropole juin 2005

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 — 5 points

Tous les résultats demandés seront justifiés.
Soit le nombre complexe $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$. On pose :
$z_2 = \overline{z_1}$, où $\overline{z_1}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_1,
$z_3 = -z_1$,
$z_4 = z_1\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexe z_1, z_2 et z_3.
2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 et z_3.
3. **a.** Montrer que $z_4 = 3\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$
   b. En déduire le module et un argument du nombre complexe z_4.
   c. Quelle est la forme algébrique de z_4 ?
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (Unité graphique : 2 cm).
   On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4.
   a. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Construire ce cercle.
   b. Construire les points A, B, C et D en utilisant leurs ordonnées.
   c. Calculer les distances AC et BD.
   d. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

EXERCICE 2 — 4 points

1. Résoudre l'équation différentielle : $9y'' + y = 0$.
2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant les conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & \sqrt{3} \\ f'(0) & = & -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

3. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, on peut écrire : $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$.
   b. Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $f(x) = -\sqrt{2}$.
4. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

PROBLÈME — 11 points

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (Unité graphique 2 cm).

1. Comportement de f en $-\infty$.

a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.

c. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

2. Comportement de f en $+\infty$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x différent de 0, on peut écrire :

$$f(x)x\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}+\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}-2\right).$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Étude des variations de f.

a. Déterminer la fonction dérivée f' de f et vérifier que l'on a pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x}+2\right)\left(\mathrm{e}^{x}-1\right).$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$, lorsque x décrit l'ensemble des nombres réels.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

5. Calcul d'une aire.

Soit α un nombre réel strictement négatif.

a. Hachurer la partie $\mathscr{H}$ du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

b. Calculer, en fonction de α et en unités d'aire la valeur de l'aire de la partie $\mathscr{H}$, que l'on notera $\mathscr{A}(\alpha)$.

c. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$. Interpréter le résultat obtenu.