# Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie juin 2008

**EXERCICE 1** **6 points**

Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue $z$

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

2. Soient A et C deux points du plan complexe, d'affixes respectives

$$z_\text{A} = -1 + \text{i} \quad \text{et} \quad z_\text{C} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\text{i}.$$

   **a.** Déterminer le module de $z_\text{A}$ et le module de $z_\text{C}$.

   **b.** Donner un argument de $z_\text{A}$.

3. **a.** On pose $Z = \dfrac{z_\text{C}}{z_\text{A}}$. Démontrer que $Z = \dfrac{1 - \text{i}\sqrt{3}}{2}$.

   **b.** Démontrer que $Z = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   **c.** En déduire que le point C est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ (en radian).

4. Placer le point A puis construire le point C en utilisant le résultat de la question précédente. Décrire la construction.
   *Toute rédaction, même partielle, sera prise en compte dans l'évaluation.*

5. Soit B l'image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{CA}}$.
   Construire le point B et démontrer que OCAB est un losange.

**EXERCICE 2** **4 points**

Un professeur d'une classe de terminale S. T. I. donne à ses élèves trois questions dans une interrogation écrite et propose deux réponses par question : l'une juste et l'autre fausse.

On désigne par J une réponse juste et par F une réponse fausse.
On suppose que les élèves répondent à chaque question en indiquant soit la réponse juste, soit la réponse fausse. À chaque élève, on associe le résultat de son interrogation, sous la forme d'un triplet constitué des réponses données aux trois questions. Par exemple, si un élève a répondu juste à la première, faux à la deuxième et à la troisième, on lui associera le résultat (J, F, F).

**I** Déterminer à l'aide d'un arbre l'ensemble des résultats possibles. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

**II** On considère un élève qui répond au hasard à chaque question et de façon indépendante pour chacune d'elles. Le professeur fait l'hypothèse d'équiprobabilité des résultats.

1. Démontrer que la probabilité de l'évènement $A$ « le résultat contient exactement une réponse juste » est égale à $\dfrac{3}{8}$.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $B$ « le résultat contient au moins une réponse juste. »

3. Dans cette question, le professeur note les copies de la manière suivante : il donne 1 point pour une réponse juste et 0 point pour une réponse fausse.
   On appelle $X$ la variable aléatoire qui à chaque résultat associe la note obtenue par l'élève.
   **a.** Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X$ ?
   **b.** Donner la loi de probabilité de $X$.
   **c.** Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de $X$.
4. Dans cette question, le professeur note les copies de la manière suivante : il donne 1 point pour une réponse juste et enlève 0,25 point pour une réponse fausse.
   Si le total des points ainsi obtenu est négatif, la note attribuée est 0.

   On appelle $Y$ la variable aléatoire qui à chaque résultat associe la note obtenue par l'élève. Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ de $Y$.

**PROBLÈME** **10 points**

**PARTIE A - Étude de la représentation graphique d'une fonction $f$**

On donne sur la feuille annexe, à rendre avec la copie, la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
Le plan est muni du repère orthogonal $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1,5 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 2$.
La droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur $-2$ au point $A(0~;~3)$.
Par lecture graphique et en utilisant les informations ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

1. Quelles sont les valeurs $f(\ln 2)$ et $f(0)$ ?
2. Déterminer, en le justifiant, $f'(\ln 2)$ et $f'(0)$.
3. Quelle est la limite de $f$ en $-\infty$?

**PARTIE B - Étude de la fonction $f$**

*On admettra maintenant que $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 6$$

*et on se propose dans cette partie de retrouver par le calcul les résultats obtenus graphiquement dans la partie A.*

1. Vérifier que pour tout nombre réel $x$ : $f(x) = \left(e^{x} - 2\right)^2 + 2$.
2. Calculer $f(\ln 2)$.
3. **a.** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
   **b.** Quelle propriété de la courbe $\mathscr{C}_f$, présentée dans la partie A est ainsi confirmée ?
4. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ en utilisant l'expression de $f(x)$ donnée en **B. 1**.
5. **a.** Déterminer la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$ et vérifier que pour tout nombre réel $x$,

$$f'(x) = 2e^{x}\left(e^{x} - 2\right).$$

   **b.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
   **c.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 0$.

6. En déduire sur $\mathbb{R}$ le tableau de signes de $f'(x)$ puis les variations de la fonction $f$.

   Dresser le tableau de variations de la fonction $f$. Indiquer la valeur exacte de $f(\ln 2)$ et les limites trouvées en **B. 3. a.** et **B. 4.**

7. Montrer que l'équation $f(x) = 7$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$. Donner, en le justifiant, un encadrement de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.

**PARTIE C Calcul d'une aire**

1. Montrer que la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 6x$$

   est une primitive de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

2. Hachurer sur la feuille annexe la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

3. Soit $\mathscr{A}$ l'aire en cm$^2$ de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur arrondie au centième.

**ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE**