↜ Baccalauréat STI Antilles-Guyane septembre 2005 ↝
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

Dans tout cet exercice, on note g la fonction numérique définie pour tout nombre réel x, par :

$$g(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

1. Soit (E) l'équation différentielle :

$$4y'' = -y,$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

a. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E).

b. On note f la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie : $f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{4}$.

Démontrer que la fonction f est égale à la fonction g.

2. Soit μ la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{14\pi}{3}\right]$.

a. Calculer μ.

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant des valeurs exactes :

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{14\pi}{3}$
$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$					
$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$					

c. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{14\pi}{3}\right]$.

Tracer la couche $\mathscr{C}$.

d. La valeur de μ trouvée en a. est-elle cohérente avec le graphique effectué en c ?
Pourquoi ?

EXERCICE 2 **4 points**

Un jeu consiste à tirer une boule dans une urne qui contient des boules rouges, des boules vertes et des boules noires.
La règle du jeu indique que :

- si la boule tirée est rouge, l'organisateur du jeu donne 1 € au joueur
- si la boule tirée est verte, l'organisateur du jeu donne 2 € au joueur
- si la boule tirée est noire, l'organisateur du jeu donne 0,50 € au joueur.

On admet que lors de chaque tirage. toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
On note :

- p_{R} la probabilité de tirer une boule rouge
- p_{V} la probabilité de tirer une boule verte

- p_{N} la probabilité de tirer une boule noire.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que le nombre de boules rouges, le nombre de boules vertes et le nombre de boules noires contenues dans l'urne sont tels que

$$p_{\text{V}} = 2p_{\text{R}} \quad \text{et} \quad p_{\text{R}} = 2p_{\text{N}}$$

On rappelle que, les boules contenues dans l'urne étant soit rouges, soir vertes, soit noires, on a l'égalité

$$p_{\text{R}} + p_{\text{V}} + p_{\text{N}} = 1$$

1. Calculer p_{R}, p_{V} et p_{N}. (Donner les valeurs exactes.)

2. Sachant que l'urne contient 3 boules noires, calculer le nombre total de boules contenues dans l'urne, ainsi que le nombre de boules rouges et le nombre de boules vertes contenues dans l'urne.

3. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage d'une boule associe la somme reçue par le joueur.

  a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X, puis calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

  b. Si l'organisateur du jeu vendait $1,50$ € un ticket donnant le droit d'effectuer en tirage, quel bénéfice pourrait-il espérer avoir réalisé à l'issue de 1 000 jeux.

Partie B

[Dans cette partie, on suppose que l'organisateur du jeu a rajouté des boules noires dans l'urne : l'urne contient 12 boules vertes, 6 boules rouges, n boules noires.

1. Exprimer, en fonction de n, la probabilité de tirer une boule verte, la probabilité de tirer une boule rouge et la probabilité de tirer une boule noire.

2. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme reçue par le joueur.

  a. Exprimer, en fonction de n, l'espérance mathématique $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.

  b. L'organisateur du jeu vend $1,50$ € le ticket donnant le droit d'effectuer un tirage.
  Comment peut-il choisir le nombre n de boules noires pour pouvoir espérer réaliser un bénéfice de 500 € à l'issue de 1 000 jeux?

PROBLÈME 12 points

Le plan est rapporte à un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A - étude d'une fonction auxiliaire

Soie g la fonction numérique définie pour tout réel x strictement positif, par :

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

1. On nomme g' la fonction dérivée de la fonction g.
Calculer $g'(x)$ pour tout réel x strictement positif.

2. **a.** Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et donner le tableau des variations de la fonction g (les limites en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées).

b. Préciser la valeur exacte de $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire le signe de $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

c. Donner le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B - étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction numérique définie pour tout réel x strictement positif, par

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

On note sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2},$$

   où g est la fonction définie dans la partie A.

   b. Donner le tableau des variations de la fonction f.

3. On nomme α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   a. À l'aide d'une calculatrice, donner la valeur approchée décimale de α arrondie à 10^{-2}.

   b. Préciser, dans un tableau, le signe de $f(x)$ pour x réel strictement positif.

4. **a.** On nomme $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 2x + 1$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   b. La droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ se coupent au point I.
   Déterminer les coordonnées du point I.

   c. étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

5. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ qui est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

6. Sur un même graphique, placer le point I, puis tracer $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

Partie C - Calcul d'aire

Soit F la fonction numérique définie pour tout réel x strictement positif, par :

$$F(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

1. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Soit $\mathcal{S}$ la surface plane limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

   a. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface $\mathcal{S}$ exprimée en unités d'aires. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

   b. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de l'aire de la surface $\mathcal{S}$ exprimée en cm^2.