∽ Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2009 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. Toutes les constructions demandées seront à faire sur le même graphique.
Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = -5\text{i}$.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 25 = 0$.
   On note z_{B} la solution de cette équation dont la partie imaginaire est positive.
   b. Placer dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives z_{A} et z_{B}.
2. **a.** Montrer que les points A et B appartiennent à un même cercle (C) de centre O.
   b. Construire le cercle (C).

   Dans la suite de l'exercice, on note I, J et K les points d'affixes respectives z_{I}, z_{J} et z_{K} telles que :
   - $z_{\text{I}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$,
   - z_{J} est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{5\pi}{6}$,
   - $z_{\text{K}} = -z_{\text{J}}$.
3. **a.** Déterminer la forme algébrique de z_{J}.
   b. Comparer les modules des nombres z_{I}, z_{J} et z_{K}.
4. **Pour la question 4., toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.**
   a. Placer avec soin les points I, J et K et tracer le cercle $\left(C'\right)$ circonscrit au triangle IJK dans le plan complexe **en laissant apparents les traits de construction**.
   Quelle est la nature du triangle IJK? Justifier cette réponse.
   b. Soit (E) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation : $2 < |z| < 5$.
   Représenter l'ensemble (E) sur le graphique précédent à l'aide de hachures, en expliquant la démarche mise en œuvre.

EXERCICE 2 **4 points**

Un bâtiment industriel est équipé d'une alarme qui se déclenche, en principe, lorsqu'il y a un dégât des eaux.
Il arrive cependant que ce système d'alarme soit mis en défaut.
On suppose qu'il ne peut pas y avoir plus d'un dégât des eaux par jour et qu'il ne peut pas y avoir plus d'un déclenchement d'alarme par jour.
Une étude portant sur 500 journées montre qu'il y a eu :

— 5 jours où il y a eu un dégât des eaux.
— 1 jour où il y a eu un dégât des eaux sans que l'alarme se déclenche.
— 10 jours où l'alarme s'est déclenchée sans qu'il y ait un dégât des eaux.

1. À l'aide des données de l'énoncé, recopier et compléter le tableau suivant.

	Nombre de jours où il y a un dégât des eaux	Nombre de jours où il n'y a pas de dégât des eaux	TOTAL
Nombre de jours où l'alarme se déclenche			
Nombre de jours où l'alarme ne se déclenche pas			
TOTAL			500

2. On choisit un jour au hasard parmi les 500 journées étudiées.
On considère les évènements suivants :
E : « Ce jour-là il y a un dégât des eaux »
A : « Ce jour-là l'alarme se déclenche »
Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

a. Calculer la probabilité $p(A)$ de l'évènement A.

b. Soit B l'évènement : « le système d'alarme est mis en défaut ».
Calculer la probabilité $p(B)$ de l'évènement B.

c. Sachant que ce jour-là, l'alarme s'est déclenchée, quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un dégât des eaux ?

3. On admet que les probabilités calculées au 2. restent valables si on choisit n'importe quel jour au hasard, quelle que soit sa date.
Pour une journée donnée, on peut se trouver dans l'une des quatre situations suivantes :
— il y a un dégât des eaux et l'alarme se déclenche,
— il y a un dégât des eaux et l'alarme ne se déclenche pas,
— l'alarme se déclenche sans qu'il y ait un dégât des eaux,
— rien ne se passe.
Les assureurs estiment les coûts suivants pour le bâtiment :
— 1 000 euros pour un dégât des eaux lorsque l'alarme fonctionne.
— 3 000 euros pour un dégât des eaux lorsque l'alarme ne fonctionne pas.
— 150 euros lorsque l'alarme se déclenche par erreur.
On note X la variable aléatoire représentant le coût journalier pour le bâtiment industriel.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Quel est le coût moyen journalier de cette assurance ?

PROBLÈME **11 points**

PARTIE A : étude graphique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - 4e^{x}}{e^{2x} - 4e^{x} + 5}.$$

On a représenté en annexe la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $\left(O~;~\overrightarrow{OI},~\overrightarrow{OJ}\right)$ (avec OI = OJ = 2 cm).
La tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point B$(0~;~-1)$ passe par le point M$(-1~;~0)$.

1. a. Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{2 - 4e^{-x}}{1 - 4e^{-x} + 5e^{-2x}}$.
En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe $(\mathcal{C})$, et compléter le graphique en annexe.

b. Montrer que le point A$(\ln 2\ ;\ 0)$ est un point de la courbe $(\mathscr{C})$.

2. Par lecture graphique, en justifiant :

a. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Déterminer la valeur de $f'(0)$.

PARTIE B : étude d'une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 5\right).$$

Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OI}},\ \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$.

1. Étudier la limite de la fonction F en $-\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ).

2. a. Montrer que pour tout réel x : $F(x) = 2x + \ln\left(1 - 4\mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-2x}\right)$.

b. Calculer la limite de la fonction F en $+\infty$ et la limite de $F(x) - 2x$ en $+\infty$.

c. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ).

3. a. Démontrer que la fonction f est la fonction dérivée de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

b. Vérifier que $F(\ln 2) = 0$.

c. Déduire de la partie A le tableau de variations de la fonction F.

4. Reproduire et compléter le tableau suivant avec des valeurs approchées à 10^{-2} près :

x	-2	-1	0	$0,5$	1	2
$F(x)$						

5. Tracer la courbe (Γ) dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OI}},\ \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$ en faisant apparaitre les interprétations graphiques des questions 1. et 2. c.

PARTIE C : calcul d'une aire

1. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\ln 2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. De quel domaine le calcul précédent permet-il de calculer l'aire ?
Hachurer sur le graphique de la feuille annexe ce domaine, et déterminer une valeur approchée de la mesure, en cm^2, de son aire (on exprimera la réponse à 0,01 cm^2 près).

ANNEXE à rendre avec la copie