Baccalauréat STI Métropole juin 2000
Génie mécanique (B, C, D, E), des matériaux

Durée : 4 heures Coefficient : 4

Exercice 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

On appellera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre solution.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On appelle A_0, A_1 et A_2 les points d'affixes respectives

$$z_0 = 3 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

   a. Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.
   b. Démontrer que le triangle $A_0A_1A_2$ est rectangle.
   c. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par A_0, A_1 et A_2.

Exercice 2 **5 points**

Pour imiter la Française des jeux, un particulier crée un jeu de loterie instantanée pour lequel 500 tickets ont été imprimés.
Les tickets gagnants se répartissent de la manière suivante :

Nombre de tickets	Somme en francs gagnée par ces tickets
1	1 000
4	200
5	100
90	10

1. Calculer la probabilité qu'un ticket tiré au hasard soit un ticket gagnant.
2. Le prix de vente du ticket est de 10 francs.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque ticket, associe son gain (en tenant compte des 10 francs d'achat : à chaque ticket gagnant 100 F, X associe ainsi 90 F).
   a. Déterminer toutes les valeurs prises par X.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement $X = -10$.
   c. Déterminer la loi de probabilité associée à X.
   d. Calculer et interpréter l'espérance de X.

Problème **10 points**

Partie A - étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]1~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x}.$$

1. Déterminer la valeur exacte de $g(2)$.
2. Calculer la limite de la fonction g en 1.
3. **a.** En remarquant que :

$$g(x) = 1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}^x},$$

calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.

b. Déduire de **3. a.** que la courbe représentative de la fonction g admet une asymptote horizontale en $+\infty$, dont on précisera une équation.

4. **a.** On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de g.

d. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]1\,;\,+\infty[$.
(On ne demande pas de tracer la courbe représentative de la fonction g).

Partie B - étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^2} + \ln(x-1).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 5 cm.

1. **a.** Calculer la limite de la fonction f en 1.
En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe $\mathscr{C}$, dont on précisera une équation.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x-1}$.

c. En déduire le sens de variations de f sur $]1\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variations de f.

3. **a.** Calculer $f(2)$.

b. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère défini précédemment.

Partie C - Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{\mathrm{e}^x} + (x-1)\ln(x-1) - \left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)x.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]1\,;\,+\infty[$.
2. **a.** On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.
Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

b. Donner une valeur de $\mathscr{A}$ en cm^2 à 10^{-2} près.