Baccalauréat STI Métropole septembre 2004
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **6 points**

La question **4.** est indépendante des questions **1., 2.** et **3.**.

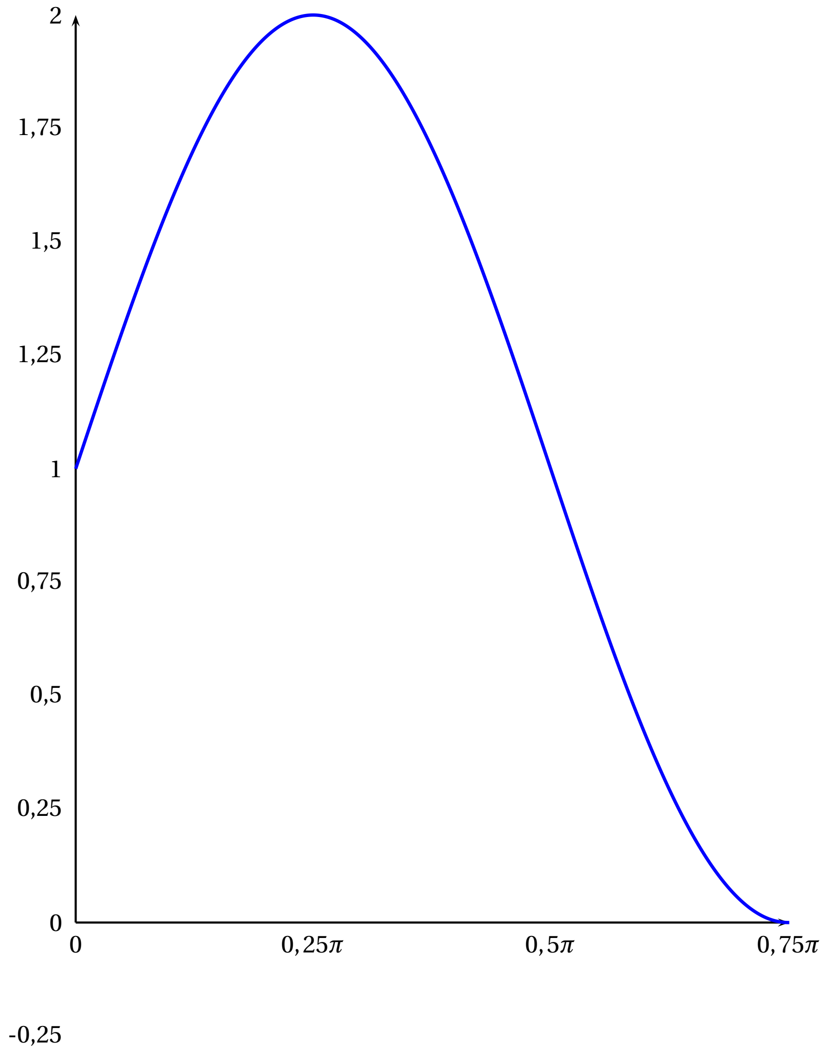
1. Soit ρ_n le terme général d'une suite géométrique de premier terme $\rho_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$.
   Déterminer ρ_n en fonction de n.
2. Soit θ_n le terme général d'une suite arithmétique de premier terme $\theta_0 = \pi$ et de raison $-\frac{\pi}{3}$.
   Déterminer θ_n en fonction de n.
3. Soit z_n le nombre complexe de module ρ_n et d'argument θ_n.
   a. Donner une forme trigonométrique de z_n en fonction de n.
   b. Déterminer la forme algébrique de z_0, z_1, z_2 et z_3.
4. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, (unité graphique : 2 cm) on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -4, \quad z_{\text{B}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{C}} = \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = \frac{1}{2}.$$

   a. Placer les point A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
   b. Soit B′ le projeté orthogonal de B sur l'axe des réels.
   Donner l'affixe de B′ et placer B′ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
   c. Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire du triangle ABB′.
   d. Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire du trapèze B′BCD.
   e. En déduire la valeur exacte en cm^2 de l'aire du quadrilatère ABCD.
   Donner la valeur arrondie au mm^2 près de cette aire.

T. S. V. P.

EXERCICE 2 **4 points**



Soit f la fonction numérique définie pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = 1 + \sin 2x.$$

La représentation graphique Γ de la fonction f est donnée ci-dessus dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$(unité graphique 4 cm).

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de f.

   b. Démontrer que la courbe Γ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

2. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sin^2(2x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 4x)$.

3. On appelle V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe Γ autour de l'axe des abscisses.

   On admet que la valeur de V, en unités de volume, est donnée par :

$$V = \pi \int_0^{\frac{3\pi}{4}} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

   Donner la valeur exacte de V en cm^3, puis sa valeur décimale arrondie au mm^3 près.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit g la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, par :

$$g(x) = 1 - x\ln x.$$

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Déterminer la fonction dérivée g' de g et étudier son signe sur $]0~;~+\infty[$.
4. établir le tableau de variations de g sur $]0~;~+\infty[$, en précisant la valeur exacte de l'extremum de g.
5. **a.** Justifier que l'équation $g(x) = 0$ a une solution α et une seule sur l'intervalle $[1~;~\text{e}]$.
   b. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
   c. En déduire, en fonction du nombre x de $]0~;~+\infty[$, le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de $]0~;~+\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\text{e}^x}.$$

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étude du comportement de f en 0 :
   a. Déterminer la limite de f en 0.
   b. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.
2. Étude du comportement de f en $+\infty$:
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\left(\dfrac{x}{\text{e}^x}\right)$.
   b. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.
3. Étude des variations de f
   a. Déterminer la fonction dérivée f' de f. Montrer que pour tout x de $]0~;~+\infty[$,
   $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x\text{e}^x}$.
   b. Établir le tableau de variations de f sur $]0~;~+\infty[$ en fonction de α.
   En prenant 1,76 comme valeur approchée de α, donner une valeur approchée de $f(\alpha)$.
   c. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
4. Dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, tracer $\mathcal{T}$, les asymptotes à $\mathcal{C}$, puis la courbe $\mathcal{C}$.