Baccalauréat STI Métropole septembre 2008
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie A

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm sur chaque axe.
Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^3 - z^2 - 2z - 12$$

1. **a.** Calculer $P(3)$. Que peut-on en déduire pour le polynôme P ?
   b. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(z) = (z-3)\left(az^2 + bz + c\right)$.
2. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 2z + 4 = 0.$$

   b. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Partie B

Soit A, B, C et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_B = 2e^{-2i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_C = 3 - \left(3\sqrt{3}\right)i \quad ; \quad z_D = 3$$

1. **a.** Calculer le module et un argument de z_A puis écrire z_A sous forme trigonométrique.
   b. Écrire z_B sous forme algébrique.
2. Placer sur la feuille de papier millimétré les points A, B, C et D dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   a. Montrer que : $\overrightarrow{DC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
   b. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 2 **4 points**

Un industriel se fournit en pièces détachées chez deux fournisseurs différents : le producteur Lavigne et le producteur Olivier. Les pièces fournies ont trois niveaux de qualité différents, en fonction des utilisations prévues. Ces niveaux de qualité influent sur la durée de vie estimée des pièces selon le tableau 1 où les durées de vie estimées sont exprimées en années.

	Qualité supérieure	Qualité ordinaire	Qualité « premier prix »
Producteur Lavigne	5	3	2
Producteur Olivier	3	2	1

Tableau 1 : durées de vie estimées des pièces en années.

Un lot est constitué de 2 000 pièces indiscernables suivant le tableau 2 ci-dessous :

	Qualité supérieure	Qualité ordinaire	Qualité « premier prix »	Total
Producteur Lavigne	100		500	800
Producteur Olivier	400	500		
Total				2 000

Tableau 2 *répartition des pièces en fonction de leur origine et de leur qualité.*

1. **a.** Recopier et compléter le tableau 2.
   b. Montrer que 1 000 pièces ont une durée de vie estimée de deux ans.
2. On choisit une pièce au hasard, chaque pièce ayant la même probabilité d'être choisie.
   a. Déterminer la probabilité que la durée de vie estimée de la pièce choisie soit de deux ans.
   b. On suppose que la pièce choisie provient du producteur Lavigne. Quelle est alors la probabilité que sa durée de vie estimée soit de deux ans ?
3. On note X la variable aléatoire qui, pour chaque pièce du lot considéré, associe sa durée de vie estimée.
   a. Déterminer la probabilité de l'évènement « $X = 3$ ».
   b. Établir sous forme d'un tableau la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce nombre.

PROBLÈME **4 points**

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression :

$$f(x) = \ln\left(1 + \text{e}^x\right) - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A Étude de la fonction f

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\text{e}^x}{\text{e}^x + 1}$.
   a. Étudier le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point E d'abscisse 0.
3. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) - (x-1) = \ln(1 + \text{e}^x) - \ln(\text{e}^x)$.
   En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) - (x-1) = \ln(\text{e}^{-x} + 1)$.
   b. Déterminer la limite de $f(x) - (x-1)$ en $+\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat.
   c. Soit Δ la droite d'équation : $y = x - 1$.
   Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.
4. En prenant comme unité graphique 2 cm sur chaque axe, construire sur une feuille de papier millimétré la droite T, la droite Δ, la droite d'équation : $x = 1$, et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie B Encadrement d'une aire

1. Hachurer sur le graphique la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$.
   On va déterminer un encadrement de la valeur de l'aire $\mathscr{A}$, de cette surface en unités d'aire.

2. Tracer la droite D d'équation : $y = 0,8x - 0,2$.
3. Par lecture graphique préciser la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
4. On admet que :

$$\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 (0,8x-0,2)\,\mathrm{d}x.$$

   a. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^2 (0,8x-0,2)\,\mathrm{d}x$.

   b. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.