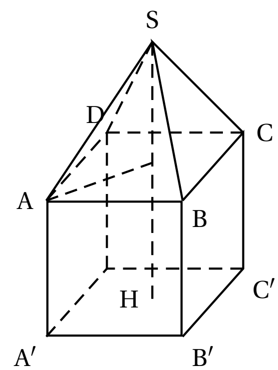
Baccalauréat STI Métropole juin 1999
Arts appliqués

EXERCICE **4 points**

Partie A

Une lanterne a la forme d'une pyramide régulière, SABCD, à base carrée reposant sur un cube ABCDA′B′C′D′.
La hauteur SH de la lanterne est de 30 cm. Soit h, en cm, la hauteur SO de la pyramide et x, en cm, la longueur de l'arête du cube.
On admet que $0 \leqslant x \leqslant 30$.



1. Exprimer en fonction de x la hauteur h de la pyramide.
2. Exprimer en fonction de x le volume V de la lanterne.
$\left(\text{on rappelle que le volume d'une pyramide est : } \dfrac{\text{surface de base} \times \text{hauteur}}{3}\right)$.

Partie B

1. Soit la fonction numérique définie dans l'intervalle $[0\,;\,30]$ par

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(30x^2 + 2x^3\right)$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (1 cm représente 2 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 1 500 unités sur l'axe des ordonnées).

   a. Calculer la dérivée f' de f.

   b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f.

2. **a.** Reproduire et compléter le tableau suivant :
(donner les valeurs de $f(x)$ arrondies à la centaine près)

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$							

   b. Construire $\mathscr{C}$.

3. Déterminer, à l'aide de la représentation graphique, la valeur de x pour laquelle $f(x) = 15\,000$.

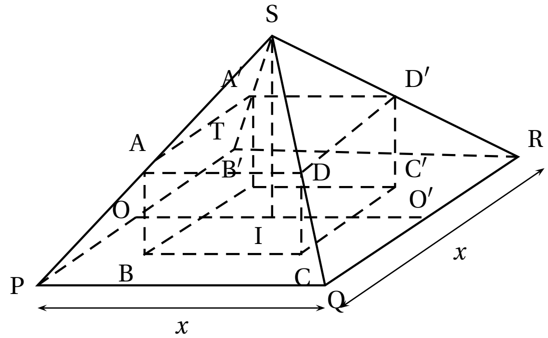
Partie C

La longueur de l'arête du cube est de 24 cm.
Déterminer alors :

1. le volume de la lanterne ;
2. la hauteur h de la pyramide ;
3. la longueur SA.

PROBLÈME

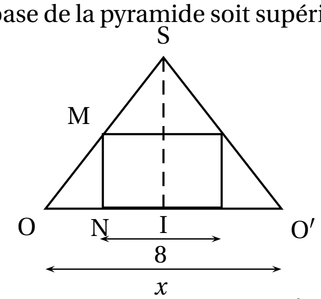
Un fabricant veut commercialiser un produit qui a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée, dans un emballage qui a la forme d'une pyramide régulière à base carrée (voir la représentation en perspective cavalière).
Les carrés PORT et BCC′B′ ont le même centre I et leurs côtés sont deux à deux parallèles.



représentation en perspective

Le but du problème est de trouver les dimensions de la pyramide de sorte que son volume soit minimal.
Le fabricant ne veut pas que la longueur PO du côté de la base de la pyramide soit supérieure à 20 cm.

Les dimensions du parallélépipède sont 8 cm pour le côté [BC] de la base carrée et 6 cm pour la hauteur [BA]. On désigne par x la longueur du côté [PO] de la base de la pyra· mide et par h la longueur de sa hauteur [IS], où S est le sommet de la pyramide.



coupe selon le plan (OSO′)

Partie A - Modélisation

On rappelle que le volume d'une pyramide est $V = \dfrac{1}{3}(B \times h)$ où B est l'aire de la base et h sa hauteur.

1. Entre quelles valeurs extrêmes le nombre x peut-il varier ?
2. Exprimer h en fonction de x. (On pourra se placer dans le plan (OSO′).)
3. En déduire une expression du volume $V(x)$ de la pyramide.

Partie B - Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]8\,;\,20]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x-8}.$$

1. Démontrer que, sur l'intervalle $]8\,;\,20]$, la dérivée est définie par :

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-12)}{(x-8)^2}.$$

2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Construire la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 1 cm pour 1 cm en abscisse, 2 cm pour 100 cm^3 en ordonnée).

Partie C - Conclusion

1. Montrer que, pour $x \in]8\ ;\ 20]$, $V(x) = 2f(x)$.
2. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la pyramide est minimum.
3. Quel est alors ce volume ? Quelle est la hauteur de la pyramide ? Quel est alors le volume à remplir entre le produit et l'emballage ?