Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole septembre 2006
Génie mécanique, civil

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$\left(z^2+9\right)\left(z^2-9z+27\right)=0.$$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_\text{A}=3\text{i} \quad ; \quad z_\text{B}=\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i} \quad \text{et } z_\text{C}=\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}.$$

   a. Écrire chacun des nombres complexes z_A, z_B et z_C sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre, réel positif et θ un nombre réel.

   b. Soit I le point d'affixe $z_\text{I}=2$. Calculer les distances AI, BI et CI.
   En déduire que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   c. À l'aide d'une règle et d'un compas, construire les points I, A, B et C. On utilisera une feuille de papier millimétré et on laissera apparents les traits de construction pour les points B et C.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle : $y''+16y=0$, y désignant une fonction numérique d'une variable réelle définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant :

$$f(0)=\frac{1}{10} \quad \text{et } f'(0)=-\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x)=\frac{1}{5}\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$.
4. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation $f(x)=\frac{1}{5}$.

   b. Déterminer les solutions de l'équation $f(x)=\frac{1}{5}$ qui appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.
   Représenter ces solutions sur un cercle trigonométrique.

PROBLÈME **12 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 2x^2 - 4\ln x + 4.$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g et prouver que, pour tout nombre réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{4x^2 - 4}{x}.$$

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser son tableau de variations (on ne demande pas le calcul des limites).

3. Déterminer le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudie la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 3 + 4\frac{\ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en 0.

b. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

3. Déterminer la dérivée f' de la fonction f et prouver que, pour tout nombre réel x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

4. À l'aide des résultats de la partie A, indiquer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.

b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} de α.

6. Pour quelle valeur de x la courbe $\mathscr{C}$ admet-elle, au point d'abscisse x, une tangente parallèle à $\mathscr{D}$?

7. Construire avec soin la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ (on utilisera une feuille de papier millimétré).

Partie C

Dans cette partie, on souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2, du domaine $\mathscr{E}$ situé entre les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

1. Hachurer le domaine $\mathscr{E}$ sur le graphique réalisé à la partie B.

2. Montrer que $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^5 4\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

3. **a.** On pose, pour tout nombre réel x strictement positif, $H(x) = (\ln x)^2$.
Déterminer la dérivée de la fonction H.

b. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur approchée au mm^2 près.