∽ Baccalauréat STI Métropole Génie électronique ∾ juin 2002

EXERCICE 1 **6 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm, on considère les points B, C, D, E et F, images respectives des nombres complexes :

$$z_{\text{B}} = 1 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{C}} = 3 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{D}} = 4,\ z_{\text{E}} = 3 - \text{i}\sqrt{3} \text{ et } z_{\text{F}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

1. Écrire les nombres complexes $z_{\text{B}},\ z_{\text{C}},\ z_{\text{D}},\ z_{\text{E}}$ et z_{F} sous forme trigonométrique.
2. Construire à la règle et au compas les points B, C, D, E et F dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
3. Calculer les distances OB, BC et CD. En déduire les distances DE, EF et OF. Que constate-t-on ?
4. Calculer les mesures des angles $\left(\overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DO}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{OE}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right)$, et $\left(\overrightarrow{\text{OD}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right)$ en radians.
5. Quelle est la nature du triangle OCD ? Justifier la réponse.
6. Calculer les aires des triangles OCD et OBC.
   En déduire, en cm^2 l'aire du polygone OBCDEF.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$, où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $y' + y = 0$.
2. Déterminer les deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ est solution de l'équation (E).
3. **a.** Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = k\text{e}^{-x} + x - 1.$$

   Vérifier que la fonction f est solution de l'équation (E).

   b. Déterminer le réel k pour que $f(0) = 0$.
4. Dans cette question, on prend $k = 1$.

   a. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0\,;2]$.

   b. En déduire une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \text{e}^{x}(x+3) - 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g en $-\infty$.
2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variations de g. En déduire le tableau de variation de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α qui appartient à l'intervalle]- 4, 0[.

4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ en fonction des valeurs de x.

Partie B : étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + (x+2)\mathrm{e}^{x}.$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
(Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées)

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$.
   c. Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (D) et $(\mathscr{C}_f)$.
2. En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = \mathrm{e}^{x}\left[\dfrac{-x}{\mathrm{e}^{x}} + (x+2)\right]$ déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Vérifier que pour tout x réel, on a $f'(x) = g(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ en son point A d'abscisse 0.
6. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
7. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la courbe $(\mathscr{C}_f)$, la tangente (T) et l'asymptote (D).
   (Utiliser la feuille de papier millimétré fournie)

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

   Calculer $H'(x)$ puis en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer, en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ de la surface comprise entre la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -2$ et l'axe des ordonnées. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.