Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole septembre 2007

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à une repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2+4z+16=0.$$

2. On note A, B, C, D et E les points du plan d'affixes respectives :

$$a=-2+2\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad b=\overline{a} \quad ; \quad c=7+\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad d=7+5\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad e=-\frac{1}{2}a.$$

a. Démontrer que $b-a=c-d$; en déduire que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

b. Calculer le module et un argument de chacun des nombres a, b et c.

c. Démontrer l'égalité : $e-c=\frac{2}{3}(b-c)$. En déduire que les points B, C et E sont alignés.

3. Utiliser les résultats précédents pour placer les points A, B et E dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, puis terminer la construction du quadrilatère ABCD en laissant apparents les traits de construction,

4. On note F le point d'affixe : $f=-2-6\text{i}\sqrt{3}$.
Démontrer que le point B est le milieu du segment [AF].
En déduire le centre de gravité du triangle ACF.

EXERCICE 2

Soit (E) l'équation différentielle :

$$9y''+4y=0,$$

où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Déterminer la fonction g, solution de (E), qui satisfait aux conditions suivantes :

— la courbe représentative de g passe par le point P de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}\ ;\ \sqrt{3}\right)$;

— la tangente à cette courbe en P a pour coefficient directeur $-\frac{2}{3}$.

3. Vérifier que, pour tout nombre réel x :

$$g(x) = 2\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ L'équation $g(x) = 0$.

b. Parmi les solutions trouvées à la question précédente, énumérer celle(s) qui appartient (appartiennent) à l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.

PROBLÈME

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x + 1 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$;
2. Démontrer qu'il existe une solution unique α de l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $[0{,}1\,;\,0{,}5]$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Étudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B. Étude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

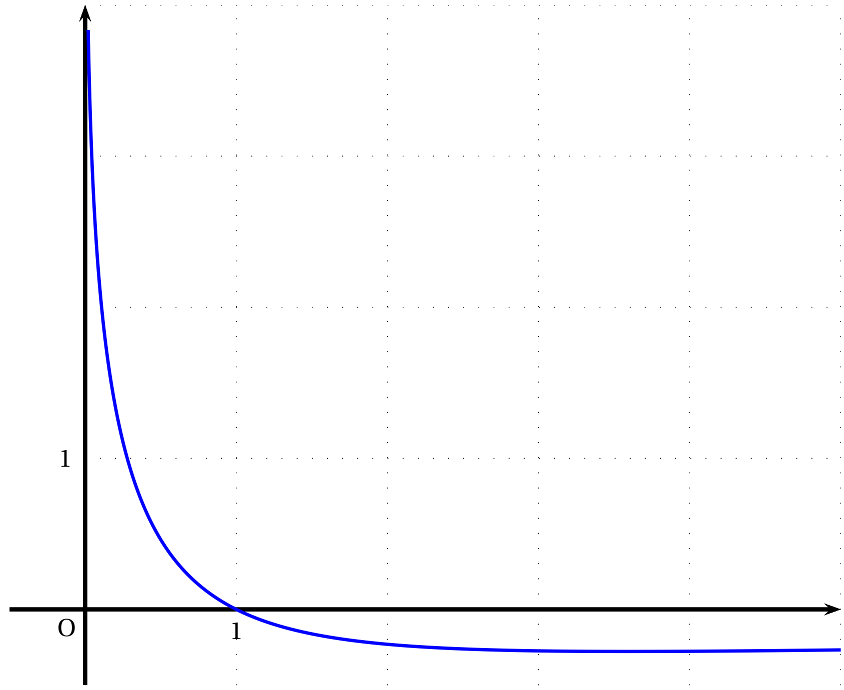
$$f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} + 2.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. Déterminer la limite de f en 0.
2. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x :

   $$f(x) = \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}} + 2.$$

   En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Soit f' la dérivée de f. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.
4. Étudier, en utilisant les résultats de la partie A, le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
5. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (On indiquera une valeur approchée de $f(\alpha)$ en prenant $\alpha \approx 0{,}28$.)
6. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
7. On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}'$ de la fonction h définie dans la partie C. Sur le graphique, tracer la tangente T ainsi que la courbe $\mathcal{C}$.



(Ce graphique n'est pas à l'échelle.)

Partie C. Aire comprise entre deux courbes

On considère dans cette partie la fonction h définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$h(x) = -\frac{\ln x}{x+1}.$$

1. On pose, pour tout nombre réel strictement positif x : $u(x) = f(x) - h(x)$.
Montrer que $u(x) = \ln x + 2$.

2. Montrer que la fonction U définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$U(x) = x\ln x + x$$

est une primitive de la fonction u.

3. **a.** Étudier le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sur l'intervalle $[1~;2]$.

4. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

5. Déterminer alors l'aire exacte du domaine $\mathcal{D}$ en unités d'aire, puis en cm^2.
Donner une valeur approchée de cette aire au mm^2 près.