Durée : 4 heures

Baccalauréat Nouvelle-Calédonie STI novembre 2009
Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d' argument $\frac{\pi}{2}$.
Soit P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 + 2z^2 - 16.$$

1. Résolution de l'équation $P(z) = 0$.
   a. Calculer $P(2)$ et déterminer deux nombres réels α et β tels que $P(z) = (z-2)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$.
   b. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

   On désigne par A, B, et C les points d'affixes respectives :
   $a = 2$; $b = -2-2\text{i}$; $c = 4\text{i}$.
2. Étude du triangle ABC
   a. Placer les points A, B, et C dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
   b. Calculer les modules des nombres complexes $b-a$, $c-a$ et $c-b$.
   c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.
   d. Déterminer l'affixe d du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un carré.
3. On note Ω le point du plan d'affixe $\omega = \sqrt{2}\text{e}^{\frac{3\text{i}\pi}{4}}$.
   a. Déterminer l'écriture algébrique de ω et placer le point Ω dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
   b. Démontrer que les points A, B, C, et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

-

EXERCICE 2 **4 points**

1. On note (x_n) la suite arithmétique de premier terme $x_0 = 10$ et de raison r.
   Sachant que $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, déterminer r et en déduire les valeurs de x_1, x_2, x_3 et x_4.
2. Un sac contient 100 boules indiscernables au toucher. Sur chacune de ces boules est inscrit l'un des numéros 0, 1, 2, 3 ou 4. Le nombre de boules portant chaque numéro est indiqué dans le tableau ci-dessous :

Numéro de la boule	0	1	2	3	4
Nombre de boules portant ce numéro	10	15	20	25	30

   Un joueur tire au hasard une boule dans le sac, et on admet que les tirages sont équiprobables.
   Pour chaque entier n compris entre 0 et 4, on note P_n la probabilité que le joueur tire une boule portant le numéro n.
   Déterminer les valeurs des nombres P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4.

3. On convient de la règle du jeu suivante :

- si le numéro n de la boule tirée est impair, le joueur perd n euros (son gain est donc égal à $-n$ euros) ;
- si le numéro n de la boule tirée est pair, le joueur gagne n euros (son gain est donc égal à $+n$ euros) .

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage d'une boule associe le gain du joueur.

a. Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X.

b. Justifier que la probabilité de l'évènement $(X = 2)$ est égale à $0,2$.

c. Donner, dans un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X puis déterminer son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.

d. On modifie la règle du jeu de façon à ce que les numéros pairs soient perdants (le gain est égal à $-n$ euros) et les impairs gagnants (le gain est égal à $+n$ euros).

Calculer, selon cette nouvelle règle, l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y associée au gain du joueur.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : résolution d'une équation différentielle

Dans cette partie, on se propose de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y' + 2y = x$$

où y désigne une fonction numérique de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_2) : $\quad y' + 2y = 0$.

2. Vérifier que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, par $u(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$, est une solution de l'équation différentielle (E_1).

3. On admet que toute solution φ de l'équation (E_1) est de la forme $\varphi(x) = u(x) + C\mathrm{e}^{-2x}$ où C est un nombre réel quelconque et u la fonction définie à la question 2.

Déterminer la solution φ_0 de l'équation (E_1) telle que : $\varphi_0(0) = \dfrac{3}{4}$.

Partie B : étude d'une fonction

medskip

On note f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-2x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$, d'unités 4 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

1. Étude des limites de la fonction f

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$·

b. Justifier que $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + 1\right)$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.

c. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

2. Étude des variations de la fonction f

a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

b. Résoudre l'inéquation $\text{e}^{-2x} \leqslant \frac{1}{4}$ et en déduire le tableau des variations de la fonction f.

c. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

d. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ possède une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. Justifier avec précision et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

3. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$, puis tracer la courbe $\mathscr{C}$

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit m un nombre réel strictement supérieur à $\ln 2$. On note $\mathscr{A}(m)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = m$.

Déterminer $\mathscr{A}(m)$ en fonction de m.

2. Calculer la limite de $\mathscr{A}(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.