Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie novembre 2008
Génie Mécanique - Génie Énergétique - Génie Civil

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Des feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
L'unité graphique est 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = 4z^4 - 7z^3 + 11z^2 + 10z - 12.$$

1. Résolution de l'équation $P(z) = 0$.

a. Déterminer les deux nombres réels α et β tels que pour tout nombre complexe z :

$$P(z) = \left(z^2 - 2z + 4\right)\left(4z^2 + \alpha z + \beta\right).$$

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$a = -1, \qquad b = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad d = \frac{3}{4}.$$

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes b et c.

b. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

c. Démontrer que les points A, B et C sont situés sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre D dont on précisera le rayon r. Construire ce cercle.

d. Déterminer les affixes e et f des deux points E et F situés sur $\mathcal{C}$ et tels que les triangles ABE et ABF soient rectangles, respectivement en B et en A. Placer les points E et F sur le cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 2 **4 points**

À l'instant $t = 0$, une bille est lâchée à la surface d'une colonne de liquide.
On note $v(t)$ la vitesse instantanée de cette bille, exprimée en $m.s^{-1}$, à un instant t donné.
On admet que la fonction v est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) :\quad y' + 140y = 5,88.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $z' + 140z = 0$, où z désigne une fonction inconnue de la variable t, dérivable sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$.

2. On pose, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$,
$y(t) = z(t) + 0,042$, où la fonction z est une solution de l'équation différentielle (H).

a. Démontrer que la fonction y est une solution de l'équation différentielle (E).

b. Parmi les fonctions y précédentes, démontrer que celle, notée v, qui s'annule pour $t = 0$, est définie par : $v(t) = 0,042\left(1 - \text{e}^{-140t}\right)$.

3. Deux utilisations de l'expression trouvée de $v(t)$.

a. Démontrer, en étudiant la limite de $v(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, que la vitesse de la bille admet une valeur limite notée ℓ dont on donnera la valeur numérique.

b. À quel instant t la bille atteint-elle 95 % de sa vitesse limite ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (L'unité graphique est 4 cm.)
Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\text{e}^x + 1}{\text{e}^x + x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan $\mathcal{P}$.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \text{e}^x(x-2) - 1.$$

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. Étude des variations de g

a. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle $[0 ;\ +\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ;\ +\infty[$.

3. Résolution de l'équation $g(x) = 0$

a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle $[1 ; 3]$.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ;\ +\infty[$.

II - Étude de la fonction f

1. Étude de la limite en $+\infty$.

a. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ;\ +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1 + \text{e}^{-x}}{1 + x\text{e}^{-x}}.$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.

2. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$ sur l'intervalle $[0 ;\ +\infty[$.

3. Étude des variations de f

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\left(\text{e}^x + x\right)^2}$ où g est la fonction définie en 1.

b. Déduire de la question I. 4., le sens de variations de f sur l'intervalle $[0 ;\ +\infty[$.

4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

III - Calcul d'aire

On note $\mathscr{B}$ l'aire, exprimée en cm^2 du domaine limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1. Hachurer sur le graphique le domaine $\mathscr{B}$.
2. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. En déduire la valeur exacte de $\mathscr{B}$, puis une valeur approchée arrondie au mm^2.