Durée : 4 heures

Baccalauréat STI novembre 2005 Génie électrique Nouvelle Calédonie

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Soit i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = 2z^3 - 10z^2 + 21z - 18$.

1. Calculer $P(2)$, puis déterminer les réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait $P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $2z^2 - 6z + 9 = 0$, puis en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm).

   On considère les points A et B, d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\text{i}$ et $z_B = \overline{z_A}$, ainsi que les points C et D d'affixes respectives z_C et z_D telles que $z_C = -z_A$ et $z_D = \text{i}z_A$.

   a. Écrire les nombres complexes z_C et z_D sous forme algébrique.

   b. Sur la copie, placer les points A, B, C, et D dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Une entreprise fabrique quatre type de pièces notées P_1, P_2, P_3 et P_4 et possède trois machines A, B et C pour procéder à leur conception.

- La fabrication de la pièce P_1 nécessite l'utilisation de chacune des machines A et B.
- La fabrication de la pièce P_2 nécessite l'utilisation de chacune des machines B et C.
- La fabrication de la pièce P_3 nécessite l'utilisation de chacune des machines A et C.
- La fabrication de la pièce P_4 nécessite l'utilisation de chacune des trois machines A, B et C.

On considère un échantillon de 2 000 pièces où il y a 700 pièces de type P_1, 1 000 pièces de type P_2, 200 pièces de type P_3 et 100 pièces de type P_4.
On choisit au hasard une pièce dans l'échantillon. Il y a équiprobabilité des choix.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

   a. « la pièce choisie est de type P_1 ».

   b. « la fabrication de la pièce choisie a nécessité l'utilisation de la machine B ».
2. Pour produire une pièce, l'utilisation de la machine A coûte 5 €, celle de la machine B coûte 4 € et celle de la machine C coûte 2 €. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie dans l'échantillon, associe son coût de réalisation. Ainsi la réalisation de la pièce P_1 coûte 9 €.

   a. Déterminer le coût de réalisation de chacune des pièces P_2, P_3 et P_4.

   b. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   c. Quel est le coût moyen de fabrication d'une pièce dans l'échantillon ?

PROBLÈME **11 points**

Partie A :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2 + \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Calculer la dérivée g' de la fonction g et étudier le signe de $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Construire le tableau de variations de la fonction g.
4. Déterminer, en justifiant votre réponse, le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 + 2\ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2\ln x}{x^2}\right)$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f'(x) = 2g(x)$ (donner le détail des calculs).
4. étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
5. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α dans l'intervalle $[3\ ;\ 4]$.

   b. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
6. **a.** Préciser $f'(1)$ et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   b. Représenter graphiquement la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C :

1. Soit la fonction H définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

   $$H(x) = x\ln x - x.$$

   a. Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1;3]$: donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au centième.