Baccalauréat STI Polynésie juin 2000
Génie civil, énergétique, mécanique (A et F)

Durée : 4 heures Coefficient : 4

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 - 4z + 16 = 0$.
2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 + z\left(5 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) + 4\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.
   a. Vérifier que $f(-4) = 0$.
   b. Déterminer les nombres a et b tels que, pour tout nombre complexe z, $f(z) = (z+4)(az+b)$.
   c. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 0$.
3. Calculer le module de chacun des nombres complexes -4 et $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
4. Soient A, B, C, D les points d'affixes respectives $2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$, $2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$, -4, $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C, D.
   b. Montrer que A, B, C sont sur un même cercle, de centre O.
   c. Montrer que D est le milieu de [AC].
   d. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Résoudre l'équation différentielle E : $9y'' + 16y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation E dont la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, passe par le point A de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}\,;\,0\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur égal à $-\dfrac{16}{3}$.
3. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 4\cos\left(\dfrac{4}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. **a.** Démontrer que $\dfrac{3\pi}{2}$ est une période pour f.
   b. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

PROBLÈME **10 points**

Les objectifs de ce problème sont l'étude d'une fonction, le tracé de sa courbe représentative et le calcul d'une aire associée à cette courbe.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire *g*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$ par

$$g(x) = 1 - \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{2x}.$$

1. Étudier la limite de g en $-\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g.
3. **a.** Dresser le tableau de variations de g (on ne demande pas la représentation graphique de g).

   b. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]-\infty\,;\,0]$, $g(x) \geqslant 0$.

Partie B - Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0]$ par

$$f(x) = x + 3 - x\mathrm{e}^{2x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Étudier la limite de f en $-\infty$.

   b. Calculer $f'(x)$ puis, en utilisant la partie A, en déduire le sens de variation de f.

   c. Dresser le tableau de variations de f.
2. **a.** Montrer que la droite D, d'équation $y = x + 3$, est asymptote à $\mathscr{C}$.

   b. Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et D.
3. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α, dans l'intervalle $[-5\,;\,0]$. En déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$, dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$.

   b. Déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-1}.
4. Tracer D et $\mathscr{C}$.

Partie C - Calcul d'une aire

Soit H la fonction définie pour tout x appartenant à $]-\infty\,;\,0]$ par

$$H(x) = \mathrm{e}(ax + b),$$

où a et b sont des nombres réels.

1. **a.** Déterminer les réels a et b pour que H soit une primitive de la fonction qui, à x associe $x\mathrm{e}^{2x}$.

   b. En déduire une primitive de f.
2. Calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, du domaine compris sur le graphique entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équations respectives $x = -\ln 3$ et $x = 0$, puis en donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2}.