Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie juin 2010
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit (E) l'équation de la variable complexe z :

$$z^2 - 4z + 8 = 0.$$

Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
On considère les points A, B, C, D et K d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2\text{i}, \quad b = 1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad c = 2 - 2\text{i}, \quad d = 3 - \text{i}\sqrt{3} \text{ et } k = 2.$$

2. Construction du quadrilatère ABCD.

a. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes a et b.

b. Démontrer que le point K est le milieu du segment [AC] et le milieu du segment [BD].

c. Placer les points A, C et K, puis construire les points B et D.

3. Nature du quadrilatère ABCD.

a. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

EXERCICE 2 **4 points**

Une urne contient 100 boules. Chacune de ces boules porte l'un des numéros 1, 2, 3, 4 ou 5.
La répartition des boules suivant leur numéro est donnée par le tableau ci-dessous :

Numéro inscrit sur la boule	1	2	3	4	5
Nombre de boules	15	25	15	35	10

Un joueur tire au hasard une boule dans cette urne. On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1. Pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant 5$, on note p_n la probabilité de tirer une boule numérotée n.
Déterminer p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.

2. On considère les évènements suivants :

- A : « La boule tirée porte un numéro inférieur ou égal à 3 » ;
- B : « La boule tirée porte un numéro pair ».

Déterminer les probabilités des évènements A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

3. Un jeu est défini de la façon suivante : un joueur mise 6 € puis il tire une boule de l'urne.

- Si le numéro de la boule est impair il reçoit une somme de 11 € ;
- si le numéro de la boule tirée est pair il ne reçoit rien.

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le gain (éventuellement négatif) du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

b. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

c. On modifie la règle du jeu, la mise reste identique.

- Si le numéro de la boule tirée est impair il reçoit la somme de a euros;
- si le numéro de la boule tirée est pair il ne reçoit rien.

Déterminer la valeur du nombre a pour que le jeu soit équitable.

PROBLÈME **11 points**

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x} - 2x + 4.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
L'unité graphique est 2 cm sur chacun des axes.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln x - x^2$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ (les limites ne sont pas demandées).
2. Étude du signe de g

   a. Calculer $g(1)$.

   b. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. Étude des limites

   a. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on déduire graphiquement pour la courbe $\mathcal{C}$?

   b. Déterminer la limite de f en ∞.

2. Étude d'une asymptote

   a. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x+4$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

   b. Déterminer la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

3. On désigne par f' la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, puis démontrer que : $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Démontrer qu'il existe une tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ qui est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.

5. Construire dans le repère $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ les droites $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$, puis la courbe $\mathcal{C}$.

Partie C : Calcul d'une aire

1. Calculer $f(2)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\ 2]$.
2. On note F la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = (\ln x)^2 - x^2 + 4x.$$

   a. Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.

   b. On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
   Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ puis en donner la valeur arrondie au mm^2.