Baccalauréat STI Polynésie juin 1999
Génie civil, génie mécanique A et F

EXERCICE 1 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Pour tout nombre complexe z on pose

$$P(z) = \left(z+3-\sqrt{5}\right)\left(z^2+8z+20\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. **a.** Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, (unité graphique : 1 cm), placer les points A, B, C et G d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -3+\sqrt{5} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -4-2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{C}} = -4+2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{G}} = -3.$$

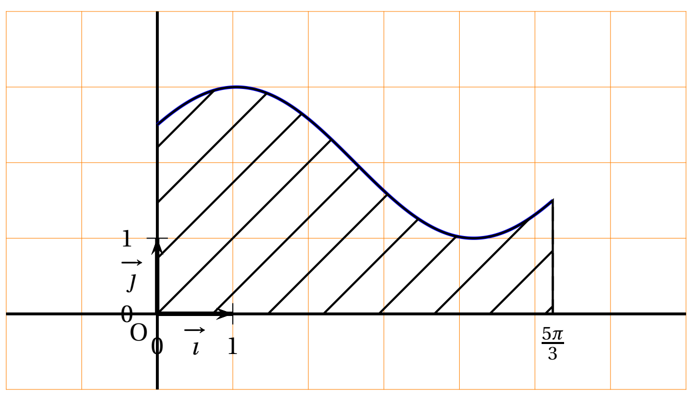
b. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|z+3| = \sqrt{5}.$$

Construire cet ensemble.

c. Démontrer que les points A, B et C appartiennent à cet ensemble.

EXERCICE 2 **6 points**



$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative, dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, (unité graphique : 1 cm), de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{5\pi}{3}\right]$ par :

$$f(x) = 2+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

1. **a.** Calculer $f'(x)$.

b. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

2. **a.** Soit g la fonction définie par $g(x) = [f(x)]^2$. Calculer $g(x)$.

b. Démontrer que $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

c. Déterminer alors une primitive G de g sur $\left[0\,;\,\frac{5\pi}{3}\right]$.

3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{5\pi}{3}} \left[\frac{9}{2} + 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \,\mathrm{d}x.$$

4. La valeur exacte, en unités de volume, du volume du solide de révolution engendré par la rotation du domaine plan hachuré autour de l'axe des abscisses est $V = \pi \int_0^{\frac{5\pi}{3}} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$.

   Donner la valeur exacte, en cm^3, de ce volume, puis sa valeur décimale arrondie à 1 mm^3 près par défaut.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique : 2 cm).
On note H le point de coordonnées $(\ln 3\,;\,\ln 3)$.

Partie A

Soient a et b deux nombres réels. On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = ax + b - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}.$$

1. Calculer $g'(x)$.
2. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de la fonction g passe par le point H et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x, on a : $f(x) = x - 2 + \dfrac{12}{\mathrm{e}^x + 3}$.
2. En utilisant l'une des deux écritures de $f(x)$ déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Démontrer que les droites (D_1) d'équation $y = x - 2$ et (D_2) d'équation $y = x + 2$ sont asymptotes obliques à la courbe (C) représentative de la fonction f. Préciser la position de (C) par rapport à chacune des droites (D_1) et (D_2).
4. Calculer $f'(x)$; montrer que, pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
5. Construire les droites (D_1), (D_2) et la courbe (C).

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}.$$

2. En déduire la primitive de la fonction f qui prend la valeur 2 pour $x = 0$.