Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie septembre 2009
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z : $\quad z^2 - 8z + 41 = 0$.
   a. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
   b. On note z_1 la solution de l'équation (E) dont la partie imaginaire est positive et on note z_3 le nombre complexe défini par $z_3 = \dfrac{1}{8}\left(-z_1^2 - 25 + 16\text{i}\right)$. Démontrer que $z_3 = -2 - 3\text{i}$·
2. On note A, B, C et K les points du plan d'affixes respectives : $a = 4 + 5\text{i}$, $b = -3 + 4\text{i}$, $c = -2 - 3\text{i}$ et $k = 1 + \text{i}$.
   a. Placer les points A, B, C et K dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   b. Démontrer que K est le milieu du segment [AC].
   c. Calculer $|a - k|$ et $|b - k|$ puis en déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Soit D le symétrique de B par rapport à K; on note d l'affixe du point D.
   a. Déterminer d et placer le point D dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   b. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

EXERCICE 2 **4 points**

On note (E) l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 0,$$

où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. On note f la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2.$$

   Déterminer l'expression de la fonction f.
3. Démontrer que pour tout nombre réel x : $\quad f(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{\pi}{3}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 4\mathrm{e}^{-x} + 6x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A : Étude des limites et recherche d'une asymptote

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-x} + 4 + 6x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}\right)$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
3. On note h la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par
   $h(x) = f(x) - (6x+1)$.
   Déterminer la limite de h en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
4. Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 6x + 1$.

Partie B : Étude des variations de la fonction *f*

1. Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie pour tout nombre réel x par :

$$f'(x) = -2\left(\mathrm{e}^{-x} + 3\right)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right).$$

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'inéquation $\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0$; en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Construire la droite $\mathscr{D}$ puis la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C : Calcul d'aire

m étant un nombre réel strictement positif, on note $\mathscr{A}(m)$ l'aire, en unités d'aire, comprise entre la droite $\mathscr{D}$, la courbe $\mathscr{C}$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = m$.

1. Exprimer $\mathscr{A}(m)$ en fonction de m.
2. Calculer $\mathscr{A}(1)$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie au centième.
3. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation
   $-4\mathrm{e}^{-2x} - 32\mathrm{e}^{-x} + 17 = 0$ (on pourra poser $X = \mathrm{e}^{-x}$).
4. Déterminer le réel $m > 0$, tel que $\mathscr{A}(m) = \dfrac{19}{8}$.