Durée : 4 heures

Baccalauréat Polynésie 11 septembre 2014 STI2D–STL spécialité SPCL

EXERCICE 1 **4 points**

On considère les nombres complexes Z_1 et Z_2 :

$$Z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{1+\text{i}} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{4\text{i}}{1+\text{i}\sqrt{3}}.$$

1. Écrire les nombres Z_1 et Z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Placer les points A_1 et A_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 dans le repère donné en annexe.
3. Calculer sous forme algébrique le produit $Z_1 \times Z_2$ et donner sa forme trigonométrique.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2 **6 points**

Une entreprise informatique a réalisé en 2013 un bénéfice de 22 000 €. La direction de cette entreprise se fixe pour objectif une hausse annuelle de son bénéfice de 4,5 %.
Pour tout entier naturel n, on note b_n le bénéfice prévu pour l'année $2013+n$, on a donc $b_0 = 22000$.

Partie A

1. Calculer les bénéfices b_1 et b_2 espérés pour 2014 et 2015.
2. Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Exprimer alors b_n en fonction de n.

Partie B

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
N prend la valeur 0
B prend la valeur 22 000
Tant que B ⩽ 40000
    N prend la valeur N + 1
    B prend la valeur 1,045 * B
Fin Tant que
A prend la valeur N + 2013
Afficher A
```

1. Expliquer à quoi correspondent les variables N et B.
2. Exécuter cet algorithme et donner le dernier résultat affiché.
3. Expliquer à quoi correspond cette valeur.
4. La direction souhaite savoir à partir de quelle année le bénéfice de l'entreprise sera supérieur à 40 000 €.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$22\,000 \times 1,045^x > 40\,000.$$

b. Quel lien existe-t-il entre le résultat de la question 2. de la partie B et l'ensemble des solutions de l'inéquation précédente ?

EXERCICE 3 **6 points**

Lorsque l'on consomme de l'alcool, le taux d'alcool dans le sang varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption. Ce taux est appelé « alcoolémie » et est mesuré en grammes par litre (g/L).
Après l'absorption de trois verres d'alcool, l'alcoolémie d'une personne donnée, en fonction du temps (exprimé en heures), est modélisée par la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = 2,5t\text{e}^{-t}.$$

Partie A

1. Donner la valeur de l'alcoolémie de la personne considérée au bout de 2 heures.
2. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $f'(t) = 2,5(1-t)\text{e}^{-t}$.
3. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \qquad y' + y = 2,5\text{e}^{-t}.$$

4. En remarquant que pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$ on a $f(t) = \dfrac{2,5t}{\text{e}^t}$, déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$ et donner une interprétation géométrique de cette limite.
5. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
6. Quelle est l'alcoolémie la plus élevée pour la personne considérée ?

Partie B

1. Sur une feuille de papier millimétré, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. On prendra 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 10 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.
2. En France, la législation autorise pour un conducteur une alcoolémie maximale de 0,5 g/L.
   Sachant que la personne a absorbé trois verres d'alcool à 12 h, à partir de quelle heure pourra-t-elle reprendre la route pour effectuer sans s'arrêter un trajet d'une durée d'une heure ?
   On utilisera la représentation graphique de la fonction f.

EXERCICE 4 **4 points**

Partie A Loi exponentielle et radioactivité

On modélise la durée de vie T (exprimée en jours) d'un élément radioactif par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que pour tout $t > 0$, $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x$.
Le Thorium 227 a une demi-vie de 18 jours, ce qui signifie que :

$$P(T \geqslant 18) = P(T \leqslant 18) = 0,5.$$

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $P(T \leqslant t) = 1 - \text{e}^{-\lambda t}$.

2. Calculer la valeur du paramètre λ pour le Thorium 227.
   On donnera le résultat arrondi à 10^{-4}.
3. On suppose que $\lambda = 0,04$.
   Donner alors la durée de vie moyenne d'un atome de Thorium 227.

Partie B Loi normale et usinage

Une entreprise fabrique en grande quantité des pièces tubulaires destinées à l'industrie aérospatiale. Le diamètre (exprimé en centimètres) d'une de ces pièces est modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $3,65$ et d'écart type $0,004$.
Les résultats seront donnés à 10^{-3} *près.*

1. Une pièce est décrétée conforme lorsque son diamètre en centimètres est compris entre $3,645$ et $3,655$.
   Calculer la probabilité qu'une pièce tubulaire de la production soit décrétée conforme.
2. Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la chaîne de production, on admet que la proportion p de pièces conformes est 79 %. On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence de pièces conformes sur un échantillon de taille n est

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

   On contrôle régulièrement la chaîne de production en prélevant des échantillons de 100 pièces.
   Lors d'un contrôle, on trouve 25 pièces défectueuses. Le responsable qualité doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la chaîne de production ?
   Justifier la réponse.

ANNEXE à rendre avec la copie

Exercice 1