Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2002
Génie mécanique, énergétique, civil

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$. On notera z_1 et z_2 les solutions de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
3. Dans le plan complexe rapporté â un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 2 + 2\text{i},\quad z_{\text{B}} = 2 - 2\text{i},\quad z_{\text{C}} = 2 + 2\sqrt{3} \text{ et } z_{\text{D}} = 2 + 2\sqrt{3} + 4\text{i}.$$

   a. Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D.

   b. Calculer les longueurs AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?

   c. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{DC}}$.

   d. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

EXERCICE 2 **5 points**

Une roue de loterie est partagée en 20 secteurs identiques :
- 1 secteur porte la marque « 100 € » ;
- 2 secteurs portent la marque « 50 € » ;
- 3 secteurs portent la marque « 20 € » ;
- 6 secteurs portent la marque « 10 € » ;
- 8 secteurs portent la marque « 0 € ».

Après avoir misé 10 euros, un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe. Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère. Le joueur touche la somme indiquée par le secteur se trouvant devant le repère.

1. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain effectif du joueur ; exemple : si un secteur « 50 € » est devant le repère, le gain effectif est de 40 euros en tenant compte de la mise. Une perte est un gain négatif.

   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

   b. Donner la loi de probabilité de X à l'aide d'un tableau.

   c. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. L'organisateur de la loterie souhaite que le jeu lui soit favorable.

   Il construit une nouvelle roue avec n secteurs identiques ($n > 12$). Cette roue comporte un secteur « 100 € », 2 secteurs « 50 € », 3 secteurs « 20 € », 6 secteurs « 10 € » et $n - 12$ secteurs « 0 € ».

   Le jeu se déroule de la même manière que précédemment : le joueur mise 10 euros et X désigne à nouveau le gain effectif.

a. Donner la nouvelle loi de probabilité de X en fonction de n.

b. Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n.

c. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que le jeu soit favorable à l'organisateur, c'est-à-dire tel que l'espérance mathématique de X soit inférieure ou égale à 0.

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est la recherche des solutions de l'équation :

$$\mathrm{e}^{x+1} - \frac{2x}{x-1} = 0.$$

Soit u la fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \mathrm{e}^{x+1}$ et soit v la fonction définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par $v(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_u)$ et $(\mathscr{C}_v)$ leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A - étude des fonctions *u* et *v*

1. **a.** étudier la limite de u en $+\infty$ et la limite de u en $-\infty$.
   En déduire que $(\mathscr{C}_u)$ admet une asymptote que l'on précisera.

   b. étudier le sens de variations de u.

2. **a.** Déterminer : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} v(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} v(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} v(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} v(x)$.
   En déduire que $(\mathscr{C}_v)$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

   b. étudier le sens de variation de v. Dresser son tableau de variations.

3. **a.** Construire les courbes $(\mathscr{C}_u)$ et $(\mathscr{C}_v)$ sur le même graphique.

   b. En déduire graphiquement le nombre de solutions de l'équation
   $\mathrm{e}^{x+1} - \dfrac{2x}{x-1} = 0.$
   Donner graphiquement une valeur approchée de chacune des solutions.

Partie B - Résolution de l'équation

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x+1} - \frac{2x}{x-1}.$$

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)$.
   Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

   b. Calculer $f(-1)$.

2. On se place à présent sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

   a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur cet intervalle.
   Calculer $f(1,2)$, puis $f(1,3)$. En déduire un encadrement de la solution α.

   b. Calculera α à 10^{-2} près.

Partie C - Calcul d'aire

On considère toujours la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x+1} - \frac{2x}{x-1}.$$

1. Montrer que sur $]-\infty\,;\,1[$, la fonction G définie par

$$G(x) = 2x + 2\ln(1-x)$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

En déduire une primitive de la fonction f sur $]-1\,;\,1[$.

2. **a.** Soit a un réel de l'intervalle $]-1\,;\,1[$. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par les courbes $(\mathscr{C}_u)$ et $(\mathscr{C}_v)$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = a$.

b. Déterminer la limite de cette aire lorsque a tend vers 1.