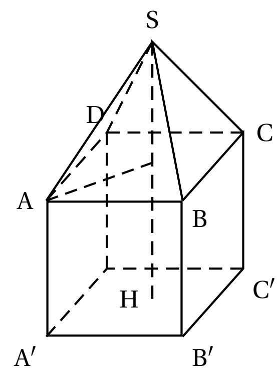
∽ Baccalauréat STI 1999 ∾
L'intégrale de juin à novembre 1999

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat STI Métropole juin 1999
Arts appliqués

EXERCICE **4 points**

Partie A



Une lanterne a la forme d'une pyramide régulière, SABCD, à base carrée reposant sur un cube ABCDA′B′C′D′.
La hauteur SH de la lanterne est de 30 cm. Soit h, en cm, la hauteur SO de la pyramide et x, en cm, la longueur de l'arête du cube.
On admet que $0 \leqslant x \leqslant 30$.

1. Exprimer en fonction de x la hauteur h de la pyramide.
2. Exprimer en fonction de x le volume V de la lanterne.
   $\left(\text{on rappelle que le volume d'une pyramide est : } \dfrac{\text{surface de base} \times \text{hauteur}}{3}\right)$.

Partie B

1. Soit la fonction numérique définie dans l'intervalle $[0\,;\,30]$ par

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(30x^2 + 2x^3\right)$$

   et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (1 cm représente 2 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 1 500 unités sur l'axe des ordonnées).
   a. Calculer la dérivée f' de f.
   b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f.
2. **a.** Reproduire et compléter le tableau suivant :
   (donner les valeurs de $f(x)$ arrondies à la centaine près)

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$							

   b. Construire $\mathscr{C}$.
3. Déterminer, à l'aide de la représentation graphique, la valeur de x pour laquelle $f(x) = 15000$.

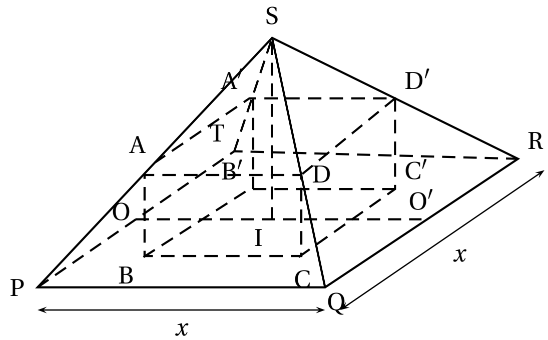
Partie C

La longueur de l'arête du cube est de 24 cm.
Déterminer alors :

1. le volume de la lanterne ;
2. la hauteur h de la pyramide ;
3. la longueur SA.

PROBLÈME

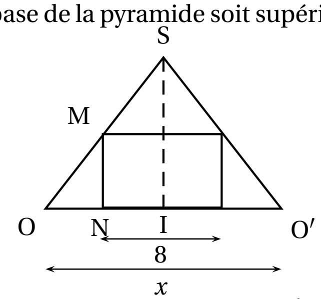
Un fabricant veut commercialiser un produit qui a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée, dans un emballage qui a la forme d'une pyramide régulière à base carrée (voir la représentation en perspective cavalière).
Les carrés PORT et BCC′B′ ont le même centre I et leurs côtés sont deux à deux parallèles.



représentation en perspective

Le but du problème est de trouver les dimensions de la pyramide de sorte que son volume soit minimal.
Le fabricant ne veut pas que la longueur PO du côté de la base de la pyramide soit supérieure à 20 cm.

Les dimensions du parallélépipède sont 8 cm pour le côté [BC] de la base carrée et 6 cm pour la hauteur [BA]. On désigne par x la longueur du côté [PO] de la base de la pyra· mide et par h la longueur de sa hauteur [IS], où S est le sommet de la pyramide.



coupe selon le plan (OSO′)

Partie A - Modélisation

On rappelle que le volume d'une pyramide est $V = \dfrac{1}{3}(B \times h)$ où B est l'aire de la base et h sa hauteur.

1. Entre quelles valeurs extrêmes le nombre x peut·il varier ?
2. Exprimer h en fonction de x. (On pourra se placer dans le plan (OSO′).)
3. En déduire une expression du volume $V(x)$ de la pyramide.

Partie B - Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]8\,;\,20]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x-8}.$$

1. Démontrer que, sur l'intervalle $]8\,;\,20]$, la dérivée est définie par :

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-12)}{(x-8)^2}.$$

2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Construire la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 1 cm pour 1 cm en abscisse, 2 cm pour 100 cm^3 en ordonnée).

Partie C - Conclusion

1. Montrer que, pour $x \in]8~;~20]$, $V(x) = 2f(x)$.
2. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la pyramide est minimum.
3. Quel est alors ce volume ? Quelle est la hauteur de la pyramide ? Quel est alors le volume à remplir entre le produit et l'emballage ?

Baccalauréat STI Génie civil Métropole juin 1999

EXERCICE 1 **5 points**

i désigne le nombre complexe du module 1 dont $\frac{\pi}{2}$ est l'un des arguments.

1. On considère le nombre complexe $z_1 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
   Calculer le module de z_1, et un argument de z_1.
2. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0.$$

   b. Écrire les solutions de l'équation sous forme trigonométrique.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On considère les nombres complexes $z_2 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_3 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$
   On note M_1 , M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3
   a. Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.
   b. Placer les points M_1, M_2 et M_3 dans le plan.
   (Faire le dessin **sur la copie** et non sur du papier millimétré.)

EXERCICE 2 **5 points**

1. Une agence de publicité veut tester l'efficacité d'une campagne d'affichage d'un nouveau produit A et pour cela réalise une étude auprès de 1000 personnes. Les résultats sont les suivants :
   — 650 personnes ont vu une affiche ;
   — 300 personnes ont acheté le produit A ;
   — 100 ont acheté le produit sans avoir vu d'affiche.
2. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de personnes qui	**ont acheté** A	**n'ont pas acheté** A	**Total**
ont vu une affiche			650
n'ont pas vu d'affiche	100		
Total	300		1000

3. Une personne est choisie au hasard parmi les 1000 personnes. Toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
   a. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   E_1 : « la personne choisie a acheté le produit A » ;
   E_2 : « la personne choisie a vu une affiche ».
   b. Définir par une phrase l'évènement $E_1 \cap E_2$.
   Déterminer la probabilité de l'évènement $E_1 \cap E_2$.
   c. Déterminer la probabilité de l'évènement $E_1 \cup E_2$.

EXERCICE 3 **10 points**

1. Le but du problème est d'étudier la position relative de deux courbes et de calculer l'aire du domaine plan compris entre ces dernières.

   Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

   Sur la feuille réponse ci-jointe (cf. en dernière page), ont été tracées les courbes représentatives C et Γ respectivement des deux fonctions f et g, définies pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,3]$, par :

$$f(x) = x - \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = x - (\ln x)^2.$$

Partie 1 : Étude des fonctions f et g.

1. **a.** Déterminer, en justifiant vos calculs, la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

   b. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $]0\,,\,3]$. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $]0\,,\,3]$.
2. On désigne par g' la fonction dérivée de g sur $]0\,;\,3]$. Calculer $g'(x)$.

   En admettant que $(x - 2\ln x)$ est positif sur $]0\,;\,3]$, en déduire que g est strictement croissante sur $]0\,;\,3]$.
3. Désigner sur la feuille-réponse (cf. dernière page), la courbe C et la courbe Γ.

Partie 2 : Position relative des deux courbes.

1. **a.** Résoudre sur $]0\,;\,3]$, l'équation $g(x) = f(x)$.

   b. En déduire les coordonnées des points d'intersection M et N des courbes C et Γ. Placer M et N sur la feuille-réponse.
2. **a.** Résoudre sur $]0\,;\,3]$, l'inéquation $g(x) \geqslant f(x)$.

   b. En déduire la position relative des courbes C et Γ sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

Partie 3 : Calcul d'une aire.

1. On désigne par D l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que :

$$(1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}) \quad \text{et} \quad (f(x) \leqslant y \leqslant g(x)).$$

   et par A son aire exprimée en cm^2.

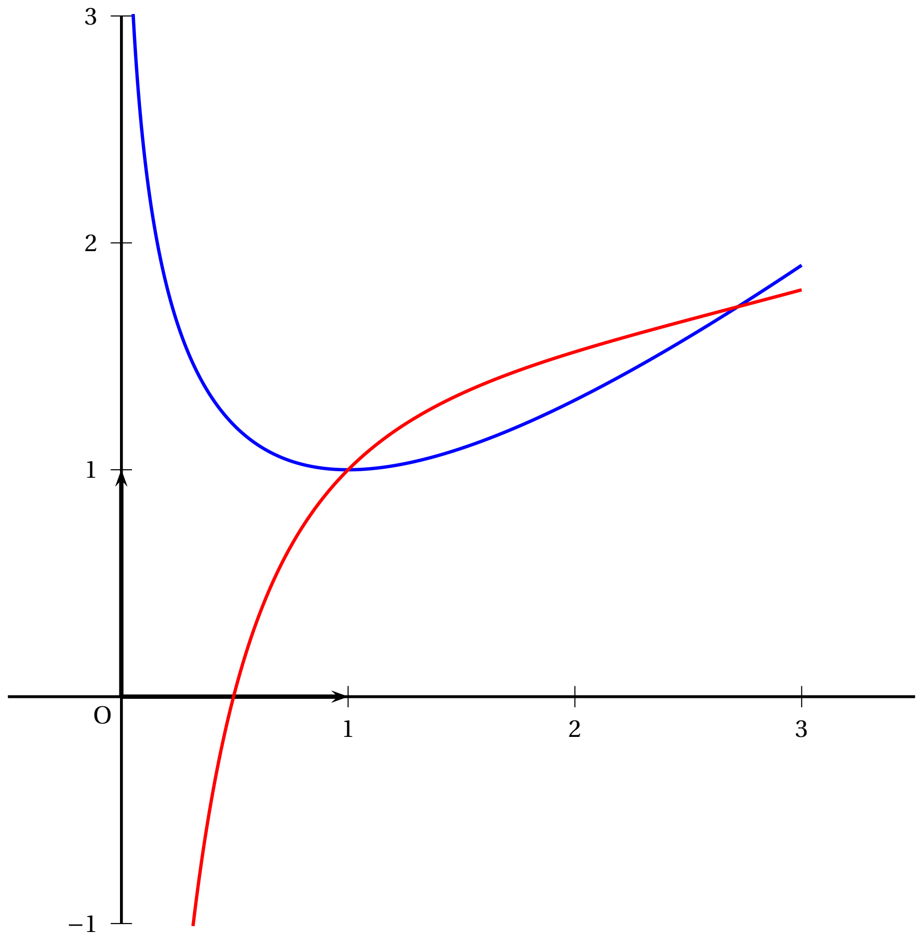
   On admet que, en unités d'aire, on a : $A = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$
2. Hachurer D sur la feuille-réponse.
3. Soit la fonction H définie sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ par : $H(x) = -x(\ln x)^2 + 3x\ln x - 3x$.

   a. Vérifier que la fonction H est une primitive de la fonction $g - f$ sur $[1\,,\,\mathrm{e}]$.

   b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de A.

   c. En donner une valeur approchée au mm^2 près par excès.

Feuille réponse à rendre impérativement avec la copie



∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 1999 ∾
Génie civil, génie mécanique A et F

EXERCICE 1 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Pour tout nombre complexe z on pose

$$P(z) = \left(z + 3 - \sqrt{5}\right)\left(z^2 + 8z + 20\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. **a.** Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, (unité graphique : 1 cm), placer les points A, B, C et G d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -3 + \sqrt{5} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -4 - 2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{C}} = -4 + 2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{G}} = -3.$$

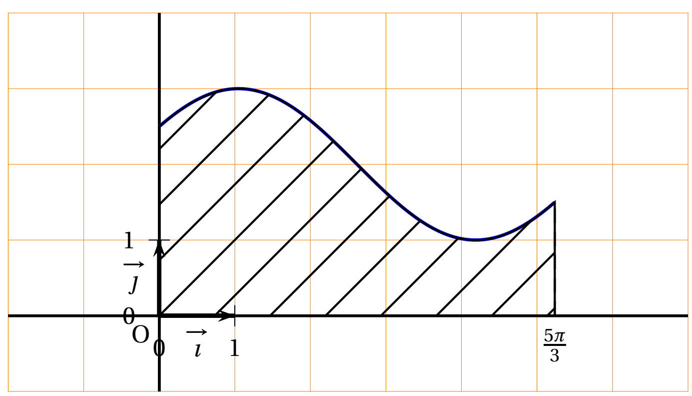
b. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|z + 3| = \sqrt{5}.$$

Construire cet ensemble.

c. Démontrer que les points A, B et C appartiennent à cet ensemble.

EXERCICE 2 **6 points**



$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative, dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique : 1 cm), de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{5\pi}{3}\right]$ par :

$$f(x) = 2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

1. **a.** Calculer $f'(x)$.

b. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

2. **a.** Soit g la fonction définie par $g(x) = [f(x)]^2$. Calculer $g(x)$.

b. Démontrer que $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

c. Déterminer alors une primitive G de g sur $\left[0 ; \frac{5\pi}{3}\right]$.

3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{5\pi}{3}} \left[\frac{9}{2} + 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \mathrm{d}x.$$

4. La valeur exacte, en unités de volume, du volume du solide de révolution engendré par la rotation du domaine plan hachuré autour de l'axe des abscisses est $V = \pi\int_0^{\frac{5\pi}{3}} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Donner la valeur exacte, en cm^3, de ce volume, puis sa valeur décimale arrondie à 1 mm^3 près par défaut.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, (unité graphique : 2 cm).
On note H le point de coordonnées $(\ln 3~;~\ln 3)$.

Partie A

Soient a et b deux nombres réels. On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = ax + b - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}.$$

1. Calculer $g'(x)$.

2. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de la fonction g passe par le point H et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x, on a : $f(x) = x - 2 + \dfrac{12}{\mathrm{e}^x + 3}$.

2. En utilisant l'une des deux écritures de $f(x)$ déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Démontrer que les droites (D_1) d'équation $y = x - 2$ et (D_2) d'équation $y = x + 2$ sont asymptotes obliques à la courbe (C) représentative de la fonction f. Préciser la position de (C) par rapport à chacune des droites (D_1) et (D_2).

4. Calculer $f'(x)$; montrer que, pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

5. Construire les droites (D_1), (D_2) et la courbe (C).

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}.$$

2. En déduire la primitive de la fonction f qui prend la valeur 2 pour $x = 0$.

∽ Baccalauréat STI Génie électronique Métropole ∾
juin 1999

EXERCICE 1

Soit le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - z^2 + 4z + 48.$$

1. **a.** Montrer que -3 est une racine de P.
   b. En déduire une factorisation de P.
   c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.
   Les points A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 4, leurs affixes respectives z_1 et z_2 ont pour arguments : $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.
   Le point C a pour affixe $z_3 = -3$.
   a. Placer ces trois points.
   b. Donner, sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique, les affixes de A et B.
   c. Calculer $|z_1 - z_3|$.
   d. Calculer alors, en arrondissant au degré près, l'angle $\widehat{\text{OAC}}$.
   On rappelle la formule suivante, dans un triangle PQR :

$$\text{PQ}^2 = \text{PR}^2 + \text{RQ}^2 - 2 \times \text{PQ} \times \text{RQ}\cos\widehat{\text{R}}.$$

EXERCICE 2

1. Résoudre l'équation différentielle suivante, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$9y'' + 16y = 0.$$

2. Déterminer la fonction f de léquation différentielle qui vérifie :

$$f(3\pi) = 3\sqrt{3} \quad \text{et} \quad f'(0) = 4.$$

3. Montrer que, pour tout réel t,

$$f(t) = 6\cos\left(\frac{4}{3}t - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$f(t) = 3\sqrt{3}.$$

5. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de l'équation précédente.

PROBLÈME

Soit la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{e}^{2x} - 4\text{e}^{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unité 5 cm sur l'axe des abscisses et de 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   Pour établir la limite en $+\infty$, on pourra transformer l'expression de $f(x)$ en la factorisant par e^x.

   b. Déduire de la question précédente que $\mathscr{C}$ admet une asymptote D que l'on précisera.

2. **a.** Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations de f.

   b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes du repère ; on notera A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

   c. Établir une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A.

   d. Tracer $\mathscr{C}$, D et T.

3. **a.** Résoudre léquation $f(x) = -3$.

   b. Soit m un nombre réel. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.

   c. Résoudre graphiquement, en rédigeant la méthode, l'inéquation :

   $f(x) > -3$.

4. **a.** Déterminer une primitive de F de f.

   b. On admet que sur $[-2~;~0]$, $\mathscr{C}$ est situé en-dessous de D. En déduire l'expression de l'aire s de la partie du plan limitée par les droites d'équation $x = -2$ et $x = 0$, par la courbe $\mathscr{C}$, et par la droite D, puis calculer s en cm^2.

❧ Baccalauréat STI Polynésie juin 1999 ❧
Génie électronique, génie électrotechnique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ direct. L'unité graphique sera égale à 4 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

   On désigne par z_1 et z_2 les solutions, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est négative.
   Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe z_1 et B celui d'affixe z_2. Placer A et B et démontrer que le triangle AOB est équilatéral.
3. Soit E le point d'affixe $z_3 = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et F son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   Déterminer l'affixe du point F et montrer que F est le milieu du segment [OB].
4. Soit D l'image de E par la translation de vecteur $2\vec{v}$.
   Déterminer l'affixe de D et montrer que OD = DB. En déduire que la droite (AD) est la médiatrice de [OB].

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 9y = 0.$$

2. Déterminer l'unique solution f vérifiant

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

   .
3. Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a\cos(3x - b)$ où le réel a est strictement positif et le réel b appartient à l'intervalle $[0 ; \pi]$.
4. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'équation :

$$2\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

PROBLÈME **11 points**

Spot la fonction f définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x^2\text{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A Étude de la fonction

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique ?

2. **a.** Montrer que $f'(x) = x(x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

c. Construire le tableau de variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-1~;~0]$.
À l'aide de la calculatrice déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 puis construire la droite d'équation $y = 1$, la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie B Représentation graphique

Soit $\mathscr{P}$ la courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ de la fonction g définie sur $]-\infty~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 1 - 2x^2.$$

1. Construire $\mathscr{P}$ dans le repère précédent.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ se coupent en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées.

3. Déterminer suivant les valeurs de x la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

Partie C Calcul d'aire

Soit H la fonction définie définie sur $]-\infty~;~+\infty[$ par :

$$H(x) = \frac{2}{3}x^3 + \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

1. Vérifier que H est une primitive de $f - g$.

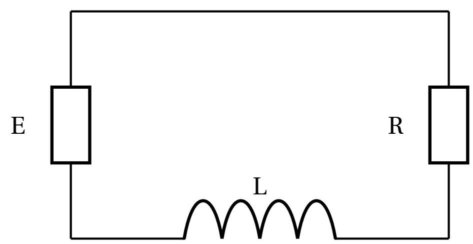
2. En déduire l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = 0$.
En donner la valeur arrondie au dixième.

Baccalauréat STI Métropole septembre 1999
Génie électronique

Durée : 4 heures Coefficient : 4

EXERCICE 1 **5 points**

Un circuit comprend en série un générateur de force électromotrice E, une bobine d'inductance L et une résis- tance R.
L'intensité du courant électrique i, exprimée en ampères, est fonction du temps t, exprimé en secondes, et est solution de l'équation différentielle (1) :



$$\mathrm{L}i'(t) + \mathrm{R}i(t) = \mathrm{E}.$$

On donne L = 0,2 H ; R = 100 Ω ; E = 10 V.

1. Écrire l'équation différentielle (1) en remplaçant L, R et E par leurs valeurs.
2. Résoudre l'équation différentielle (2) : $\dfrac{1}{5}y' + 100y = 0$.
3. Vérifier que la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par $i(t) = -\dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-500t} + \dfrac{1}{10}$ est solution de l'équation différentielle (1).
4. Étudier sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ les variations de la fonction i définie à la question 3.
   Dresser le tableau de variations de i sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$; préciser la limite de i en $+\infty$.
5. Déterminer par le calcul l'instant t_1 à partir duquel l'intensité $i(t)$ sera supérieure à $0,095$ A.
   En donner la valeur exacte puis la valeur décimale approchée à 10^{-3} près par excès.

EXERCICE 2 **5 points**

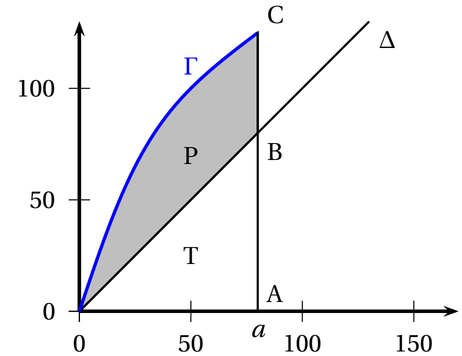
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Soit A le point d'affixe : $z_\mathrm{A} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Calculer le module et un argument de z_A. En déduire la forme exponentielle du nombre complexe z_A. Placer le point A avec précision dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre 0 et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. On appelle z_B l'affixe du point B.
   Calculer z_B sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
   Placer le point B avec précision dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
3. Quelle est la nature du triangle AOB ?
4. Soit C l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et z_C son affixe.
   - **a.** Placer le point C avec précision dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   - **b.** Calculer z_C sous forme exponentielle.
   - **c.** Montrer que $z_\mathrm{C} = z_\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot$ En déduire une forme algébrique de z_C.

d. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

PROBLÈME **10 points**

La figure ci-contre représente la voile d'un bateau constituée par la réunion des parties P et T. Les distances sont exprimées en dm et le repère est orthonormal.
La Courbe Γ représente la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :
$g(x) = x + \dfrac{5000x}{x^2 + 2500}$. La droite Δ a pour équation $y = x$.



a étant un nombre appartenant à l'intervalle $[50~;~100]$:

- P est l'ensemble des points dont les coordonnées $(x~;~y)$ vérifient $0 \leqslant x \leqslant a$ et $x \leqslant y \leqslant g(x)$;
- T est l'ensemble des points dont les coordonnées $(x~;~y)$ vérifient $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant x$. La droite d d'équation $x = a$ coupe l'axe des abscisses, la droite Δ et la courbe Γ respectivement aux points A, B et C.

Le but du problème est de déterminer, si elle existe, la valeur de a pour laquelle les aires de P et de T sont égales.

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $h(x) = g(x) - x$.

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h. Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?
2. En utilisant le signe de $h(x)$ étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite Δ.

Partie B

On rappelle que la fonction h est définie par : $h(x) = \dfrac{5000x}{x^2 + 2500}$.

1. Déterminer une primitive H de la fonction h sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. Montrer que l'aire $\mathscr{A}(a)$ de la partie P est :

$$\mathscr{A}(a) = 2500\left[\ln\left(a^2 + 2500\right) - \ln 2500\right].$$

3. Calculer, en fonction de a, l'aire $\mathscr{B}(a)$ de la partie T.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 2500\ln\left(x^2 + 2500\right) - 2500\ln 2500 - \frac{1}{2}x^2.$$

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. (on admettra que la limite en $+\infty$ de f est $-\infty$.)
   c. Dans le repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 1 cm pour 10 dm sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 dm^2 sur l'axe des ordonnées), construire la représentation graphique de la fonction f.
2. **a.** Montrer que sur l'intervalle $[50~;~100]$ l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution, notée α. Déterminer un intervalle d'amplitude 10^{-1} contenant le réel α.
   b. Quelle est l'interprétation géométrique de ce nombre α ?
   c. Déterminer alors une valeur décimale approchée de l'aire de chacune des parties P et T en prenant 79,3 comme valeur décimale approchée de α.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie mécanique Métropole juin 1999 ∽

EXERCICE 1 **4 points**

On considère l'expérience aléatoire suivante :
Une première urne contient cinq boules numérotées 0, 2, 4, 6, 8.
Une deuxième urne contient cinq boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5.
On appelle « partie » le fait de tirer au hasard une boule de la première urne, puis une boule de la deuxième. Une « partie » a donc 25 résultats possibles supposés équiprobables.

1. **a.** Recopier, puis compléter le tableau donnant la somme des deux nombres obtenus pour chacun des résultats possibles.

+	0	2	4	6	8
1					
2					
3				9	
4		6			
5					

b. Quelle est la probabilité d'obtenir pour une « partie » une somme égale à 7 ?

c. Quelle est la probabilité d'obtenir pour une « partie » une somme paire ?

d. Quelle est la probabilité d'obtenir pour une « partie » une somme au plus égale à 6 ?

2. On considère le jeu suivant associé à chaque « partie ». Un joueur gagne :

30 francs si la somme est paire ;

100 francs si la somme est treize ;

10 francs si la somme est 1, 3 ou 5 ;

et ne gagne rien dans les autres cas.

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque partie associe son gain en francs.

a. Calculer la probabilité de gagner 100 francs.

b. Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

d. L'organisateur demande 20 francs pour obtenir le droit de jouer. Ce jeu est-il équitable ?

EXERCICE 2 **4 points**

On donne l'équation différentielle :

$$y'' + 36y = 0.$$

1. Donner la forme des solutions de cette équation différentielle.

2. Déterminer la fonction f solution de cette équation différentielle satisfaisant aux conditions suivantes :

— la courbe représentative de f passe par le point G de coordonnées (0 ; p3) ;

— la droite tangente à cette courbe au point G a pour coefficient directeur 6.

3. Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = 2\sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right).$$

4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

PROBLÈME **12 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - 10x\mathrm{e}^{-2x}.$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$(unité graphique 2 cm).

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. **a.** Vérifier que $f(x) = 2 - \dfrac{10}{\mathrm{e}^x} \cdot \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

b. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+1$.

c. En déduire que la courbe (C) admet une asymptote (D) dont on précisera une équation.

3. **a.** Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie pour tout x réel par :

$$f'(x) = (20x - 10)\mathrm{e}^{-2x}.$$

b. Étudier pour tout réel x le signe de $f'(x)$, puis établir le tableau de variations de f.

c. En déduire que la courbe (C) admet une tangente horizontale en un point B dont on précisera les coordonnées.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5. Tracer dans le même repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ l'asymptote (D), la tangente (T) et la courbe (C).

6. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \left(-\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}$.

a. Déterminer sa fonction dérivée.

b. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

7. **a.** Hachurer sur la représentation graphique le domaine (A) du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations :
$x = 0$, $x = 3$.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine (A) exprimée en cm^2, puis en donner une valeur décimale approchée à 1 mm^2 près.