∽ Baccalauréat STI 2002 ∽

L'intégrale de juin à novembre 2002

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat STI F11 F11′ Métropole juin 2002 ∾

Calculatrice autorisée
Durée : 2 heures **Coefficient : 2**

EXERCICE **8 points**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x} \quad \left(\text{On rappelle que } \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right).$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unités graphiques 4 cm. On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans ce repère.
La courbe $\mathscr{C}_g$ est tracée sur la feuille annexe qu'il faudra compléter et rendre avec la copie.

I. Étude de la fonction f .

1. Déterminer la limite de la fonction f au voisinage de $-\infty$.
2. On admet que la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$ est égale à 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f a le même signe que $2x - x^2$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Sur la feuille annexe, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le même repère.

II. Étude des positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Déterminer graphiquement sur quels intervalles la courbe $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus la courbe $\mathscr{C}_f$.

PROBLÈME **12 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln x - x + 2.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en 0.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
   b. Montrer que $f(x) = x\left(4\dfrac{\ln x}{x} - 1 + \dfrac{2}{x}\right)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$).
2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0\,;\ +\infty[$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.
3. **a.** Déterminer la valeur exacte de $f(2)$ et de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en fonction de $\ln 2$.
   b. Déterminer la valeur exacte de $f(\mathrm{e})$ et de $f(\mathrm{e}^2)$ en fonction de e.

c. Résoudre dans $]0~;~+\infty[$ l'équation $f(x) = -x-2$.

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant : (On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.)

x	0,5	1	2	3	4	5	7	11	17
$f(x)$									

5. Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$

6. Dans le même repère, tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x-2$.
Comment peut-on graphiquement retrouver le résultat de la question **3. c.** ?

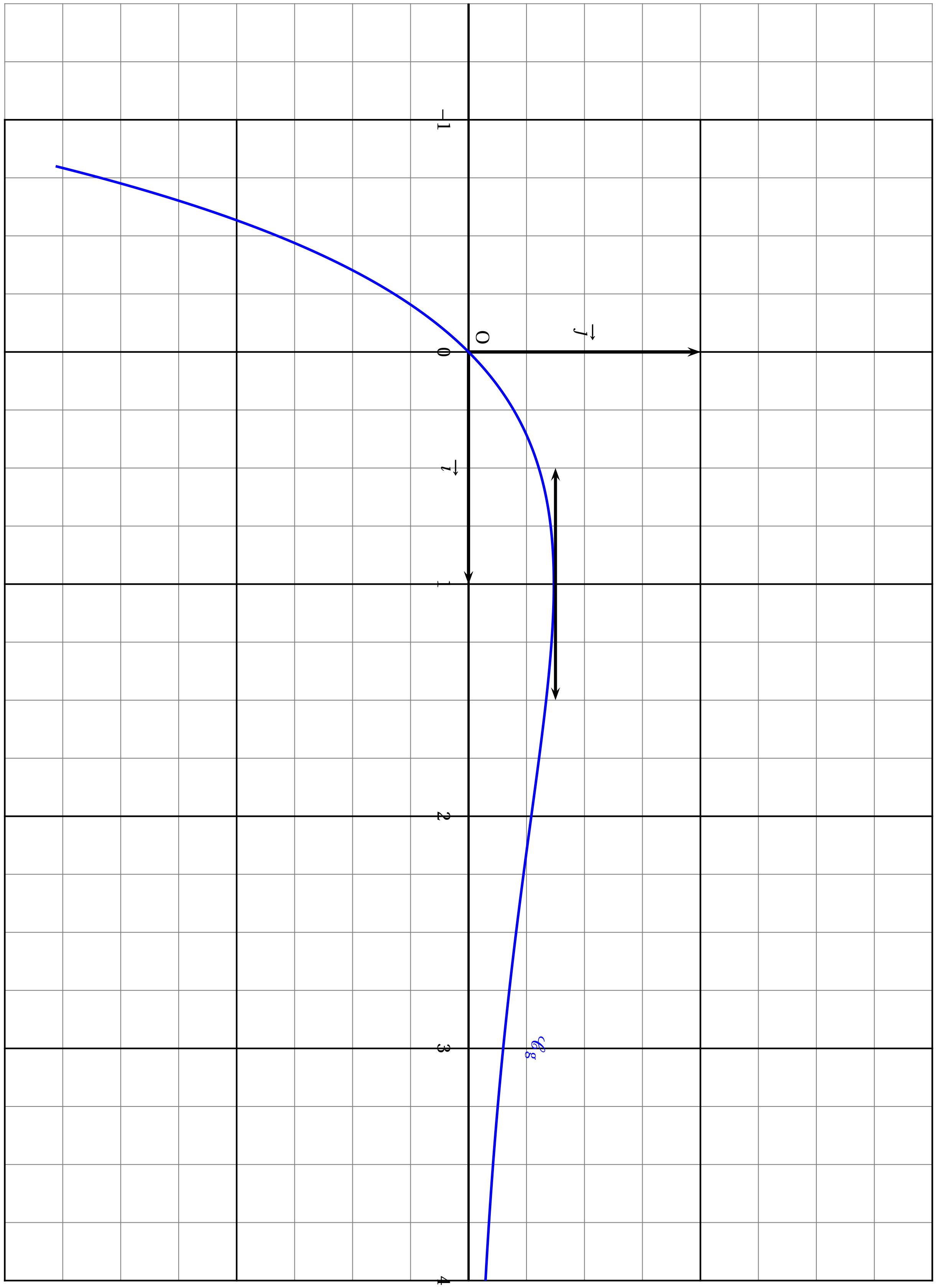
7. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = 4x\ln x - 2x - \frac{x^2}{2}.$$

a. Démontrer que F est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

b. Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. En donner la valeur exacte en fonction de $\ln 2$.

À RENDRE AVEC LA COPIE



Durée : 2 heures

Baccalauréat STI Métropole Arts appliqués juin 2002

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **8 points**

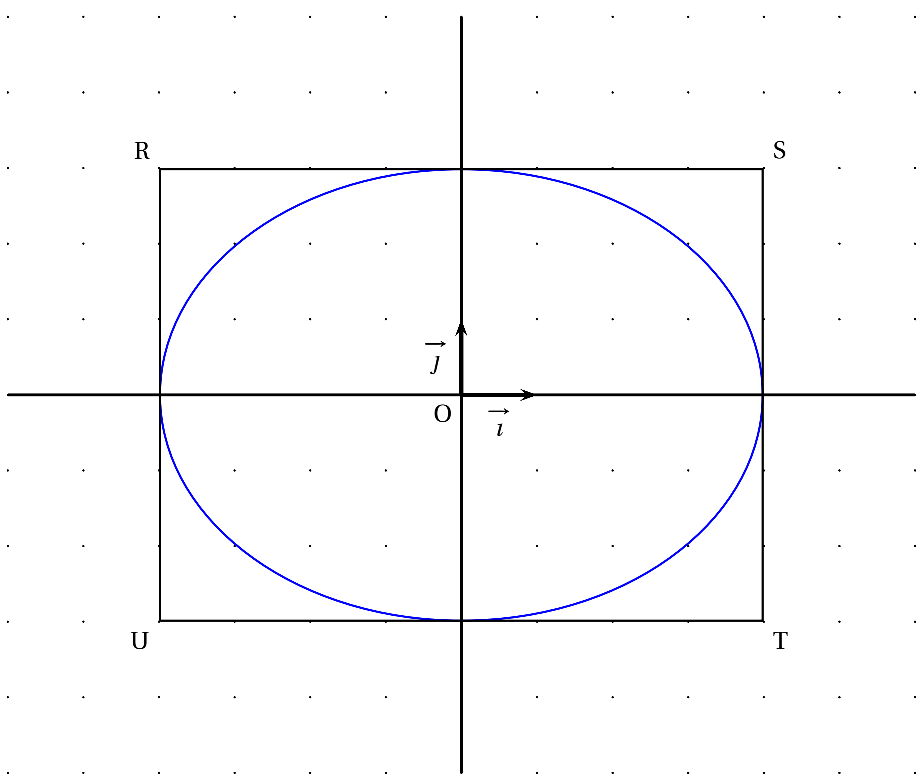
Dans le repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ci-dessous, on considère le rectangle RSTU de centre O et l'ellipse $\mathscr{E}$ inscrite dans ce rectangle. Le point R a pour coordonnées $(-4 ; 3)$.

Reproduire la figure ci-dessous sur une feuille de papier millimétré.

1. Placer les sommets de cette ellipse qu'on notera A, A$'$, B et B$'$ et préciser leurs coordonnées. On placera A et A$'$ sur l'axe focal. Décrire la construction géométrique des foyers F et F$'$ et préciser leurs coordonnées.
2. Parmi les égalités suivantes, choisir celle que vérifie tout point M de l'ellipse $\mathscr{E}$.

   $M\text{F} - M\text{F}' = 8$ $\qquad$ $M\text{F} + M\text{F}' = 6$ $\qquad$ $M\text{F} + M\text{F}' = 8$
3. Parmi les égalités suivantes, choisir celle qui est une équation de l'ellipse $\mathscr{E}$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   $9x^2 + 16y^2 = 144$ $\qquad$ $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ $\qquad$ $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{t^2}{9} = 1$
4. Déterminer l'ordonnée des points de $\mathscr{E}$ ayant pour abscisse 2.
5. On veut dessiner un carré de centre O dont les sommets sont des points de l'ellipse $\mathscr{E}$ et dont les côtés sont parallèles à ceux du rectangle. Quelle est la longueur du côté de ce carré ?



EXERCICE 2 **12 points**

Partie A

Dans le repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ dont l'unité graphique est 3 cm, on a tracé la courbe $\mathscr{P}$ représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ où $a,\ b$ et c sont des nombres réels.

1. **a.** Déterminer graphiquement $g(0)$, $g(1)$, $g'(1)$

   b. En déduire les valeurs de a, b, c

2. Sachant que $g(x) = -x^2 + 2x + 1$, déterminer la primitive G de la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $G(0) = 0$.
3. Calculer l'intégrale I$=\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction h définie sur $[1{,}5\,;\,4]$ par $h(x) = \dfrac{3-x}{x-1}$ et $\mathscr{H}$ la courbe représentative de h dans le même repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la fonction h', dérivée de la fonction h. étudier son signe et en déduire les variations de h sur $[1{,}5\,;\,4]$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe it' au point B$(2\,;\,1)$. On admettra que (T) est aussi tangente à $\mathscr{P}$ au même point B.
3. Sur une feuille de papier millimétré choisir un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ dont l'unité graphique est 3 cm et dont l'axe des abscisses est placé à mi-hauteur. On trace la courbe $\mathscr{H}$ et la droite (T).
4. Soit H la fonction définie sur $[1{,}5\,;\,4\,]$ par $H(x) = 2\ln(x-1) - x$. Vérifier que H est une primitive de la fonction h, puis calculer l'intégrale J$=\displaystyle\int_2^3 h(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C

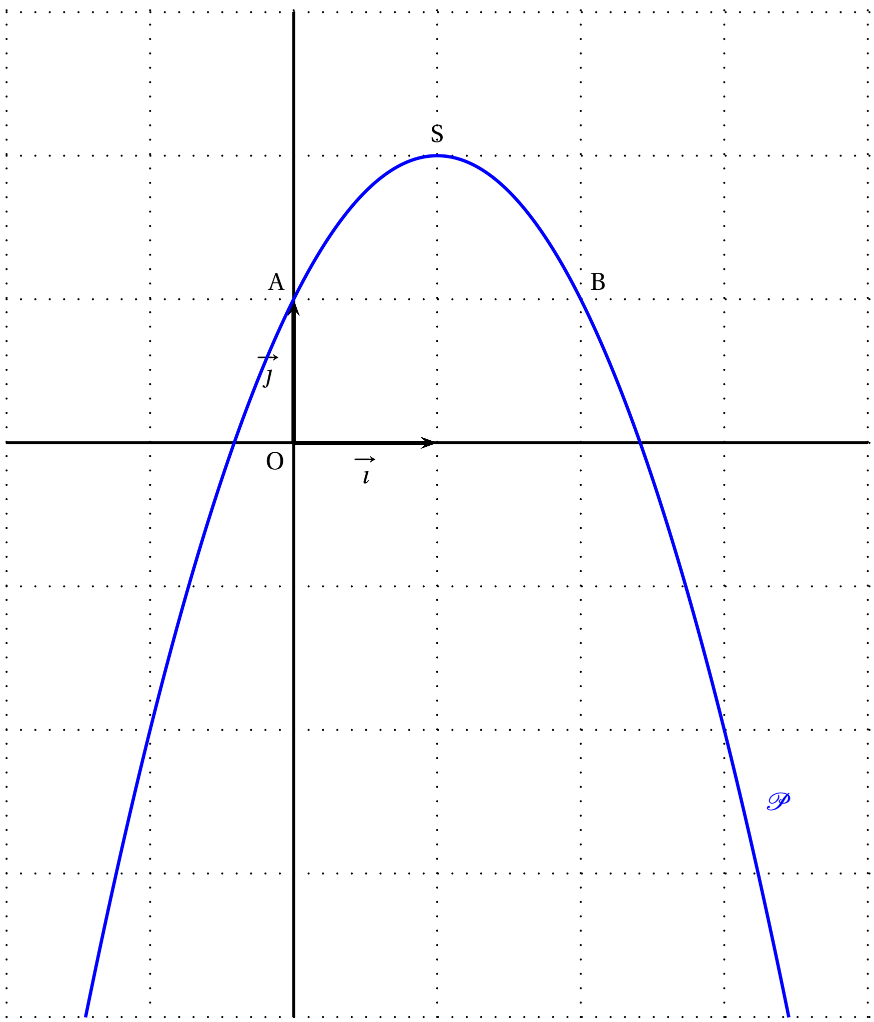
On considère maintenant la fonction f définie sur $[0\,;\,3]$ et telle que :
si $0 \leqslant x \leqslant 2$ alors $f(x) = g(x)$,
si $2 \leqslant x \leqslant 3$ alors $f(x) = h(x)$.

1. **a.** Sur le graphique de la partie B, reproduire la courbe $\mathscr{P}$ de la partie A, puis tracer en rouge la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.

   b. Construire sur le graphique la courbe $\mathscr{C}'$ symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à 1'axe des abscisses .

2. Un publicitaire veut créer un logo dont le contour est formé par $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et l'axe des ordonnées. Prouver que l'aire de ce logo, en cm^2 est $\mathscr{A} = 18(\mathrm{I}+\mathrm{J})$. En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 1 mm^2 près.

Annexe : exercice 2



Baccalauréat STI Antilles juin 2002
Génie civil, énergétique, mécanique

EXERCICE 1 **4 points**

Soit i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$

1. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation en z

$$z^2+25=0.$$

   b. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

2. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation en z

$$z^2-2z+5=0.$$

   b. Calculer, sous forme algébrique, le carré de chacune des solutions de cette équation.

3. Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}}=-3-4\text{i} \quad z_{\text{B}}=-3+4\text{i} \quad z_{\text{C}}=5\text{i} \quad z_{\text{D}}=-5\text{i}.$$

   a. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

   b. Démontrer que le triangle BCD est rectangle.

   c. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

Deux tableaux sont donnés. Ils sont à compléter et à rendre avec la copie.

Une machine fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires qui peuvent présenter trois sortes de défauts un défaut d'épaisseur, un défaut de longueur, un défaut de largeur.

Dans un lot de 1 000 pièces, fabriquées par cette machine, 90 % des pièces n'ont aucun défaut, 0,2 % ont les trois défauts et 26 pièces ont comme seul défaut un défaut d'épaisseur.

Parmi les 950 pièces n'ayant pas de défaut d'épaisseur, il y a 29 pièces qui ont un défaut de longueur et 10 pièces qui ont un défaut de longueur et un défaut de largeur.

Parmi les pièces ayant un défaut d'épaisseur, 24 % ont un défaut de longueur.

1. **a.** Compléter les deux tableaux suivants.

Pièces n'ayant pas de défaut d'épaisseur			
Longueur / Largeur	Pièces ayant un défaut de longueur	Pièces n'ayant pas de défaut de longueur	
Pièces ayant un défaut de largeur	10		
Pièces n'ayant pas de défaut de largeur			
	29		950

Pièces ayant un défaut d'épaisseur			
Longueur / Largeur	Pièces ayant un défaut de longueur	Pièces n'ayant pas de défaut de longueur	
Pièces ayant un défaut de largeur			
Pièces n'ayant pas de défaut de largeur		26	

b. On choisit au hasard une pièce dans ce lot de 1 000 pièces et on suppose tous les tirages équiprobables.

On définit les évènements suivants :

— A : « la pièce possède un seul défaut » ;

— B : « la pièce possède deux défauts et deux seulement ».

Montrer que : $p(A) = 0,066$ et $p(B) = 0,032$.

2. On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute pièce tirée au hasard dans ce lot de 1 000 pièces, associe le nombre de défauts de cette pièce.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable X. On donnera les résultats sous forme de tableau.

b. Calculer la valeur exacte de l'espérance mathématique $\text{E}(X)$.

PROBLÈME **12 points**

Soit la fonction numérique f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3\ln x}{2x^2} + x - 1.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ l'unité de longueur est 2 cm.

Partie A - étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction numérique g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 6\ln x + 3.$$

1. Déterminer le signe de $x^3 - 1$ suivant les valeurs de x, élément de $]0 ; +\infty[$.
On pourra utiliser le fait que

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right), \text{ pour tout réel } x.$$

2. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$. Donner les variations de la fonction g.

3. En déduire que, pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $g(x)$ est strictement positif

Partie B - étude de la fonction *f*

1. Calculer la limite de $\dfrac{\ln x}{x^2}$ quand x tend vers 0, en justifiant la réponse.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.

2. **a.** Préciser la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

   c. Déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^3}, \quad \text{pour tout } x \text{ élément de }]0 ~;~ +\infty[.$$

   En déduire le sens de variation de la fonction f.

4. **a.** Soit K le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point K.

   b. Tracer avec soin la droite $\mathcal{D}$, la droite $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie C – Calcul d'une aire

1. Soit la fonction numérique h définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

   Soit h' la fonction dérivée de la fonction h. Calculer $h'(x)$.

2. En déduire une primitive de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.

3. On considère la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

   a. Hachurer cette partie du plan, puis calculer la valeur exacte de son aire en cm^2.

   b. Donner la valeur arrondie au mm^2 de cette aire.

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI La Réunion juin 2002 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$. On notera z_1 et z_2 les solutions de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
3. Dans le plan complexe rapporté â un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 2 + 2\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 2 - 2\text{i}, \quad z_{\text{C}} = 2 + 2\sqrt{3} \text{ et } z_{\text{D}} = 2 + 2\sqrt{3} + 4\text{i}.$$

   a. Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D.

   b. Calculer les longueurs AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?

   c. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{DC}}$.

   d. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

EXERCICE 2 **5 points**

Une roue de loterie est partagée en 20 secteurs identiques :
- 1 secteur porte la marque « 100 € » ;
- 2 secteurs portent la marque « 50 € » ;
- 3 secteurs portent la marque « 20 € » ;
- 6 secteurs portent la marque « 10 € » ;
- 8 secteurs portent la marque « 0 € ».

Après avoir misé 10 euros, un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe. Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère. Le joueur touche la somme indiquée par le secteur se trouvant devant le repère.

1. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain effectif du joueur ; exemple : si un secteur « 50 € » est devant le repère, le gain effectif est de 40 euros en tenant compte de la mise. Une perte est un gain négatif.

   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

   b. Donner la loi de probabilité de X à l'aide d'un tableau.

   c. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. L'organisateur de la loterie souhaite que le jeu lui soit favorable.

   Il construit une nouvelle roue avec n secteurs identiques ($n > 12$). Cette roue comporte un secteur « 100 € », 2 secteurs « 50 € », 3 secteurs « 20 € », 6 secteurs « 10 € » et $n - 12$ secteurs « 0 € ».

   Le jeu se déroule de la même manière que précédemment : le joueur mise 10 euros et X désigne à nouveau le gain effectif.

a. Donner la nouvelle loi de probabilité de X en fonction de n.

b. Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n.

c. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que le jeu soit favorable à l'organisateur, c'est-à-dire tel que l'espérance mathématique de X soit inférieure ou égale à 0.

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est la recherche des solutions de l'équation :

$$\mathrm{e}^{x+1} - \frac{2x}{x-1} = 0.$$

Soit u la fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \mathrm{e}^{x+1}$ et soit v la fonction définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par $v(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_u)$ et $(\mathscr{C}_v)$ leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A - étude des fonctions*u* et *v*

1. a. étudier la limite de u en $+\infty$ et la limite de u en $-\infty$.
En déduire que $(\mathscr{C}_u)$ admet une asymptote que l'on précisera.

b. étudier le sens de variations de u.

2. a. Déterminer : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} v(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} v(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} v(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} v(x)$.
En déduire que $(\mathscr{C}_v)$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

b. étudier le sens de variation de v. Dresser son tableau de variations.

3. a. Construire les courbes $(\mathscr{C}_u)$ et $(\mathscr{C}_v)$ sur le même graphique.

b. En déduire graphiquement le nombre de solutions de l'équation
$\mathrm{e}^{x+1} - \dfrac{2x}{x-1} = 0.$
Donner graphiquement une valeur approchée de chacune des solutions.

Partie B - Résolution de l'équation

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x+1} - \frac{2x}{x-1}.$$

1. a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.
Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

b. Calculer $f(-1)$.

2. On se place à présent sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur cet intervalle.
Calculer $f(1,2)$, puis $f(1,3)$. En déduire un encadrement de la solution α.

b. Calculera α à 10^{-2} près.

Partie C - Calcul d'aire

On considère toujours la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x+1} - \frac{2x}{x-1}.$$

1. Montrer que sur $]-\infty\,;\,1[$, la fonction G définie par

$$G(x) = 2x + 2\ln(1-x)$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

En déduire une primitive de la fonction f sur $]-1\,;\,1[$.

2. **a.** Soit a un réel de l'intervalle $]-1\,;\,1[$. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par les courbes $(\mathscr{C}_u)$ et $(\mathscr{C}_v)$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = a$.

b. Déterminer la limite de cette aire lorsque a tend vers 1.

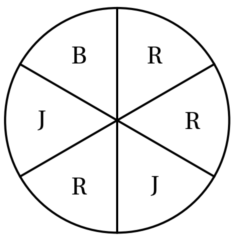
Baccalauréat TSI Métropole juin 2002
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 — 4 points

Partie A

Une roue de loterie comporte 3 secteurs, portant respectivement les numéros 1, 2 et 3. Quand on fait tourner la roue, un repère indique le numéro sortant.
La probabilité de sortie du numéro 2 est double de la probabilité de sortie du numéro 1, et la probabilité de sortie du numéro 3 est triple de celle du numéro 1.
Calculer les probabilités de sortie respectives des trois numéros.

Partie B



La roue est maintenant divisée en 6 secteurs égaux ayant chacun la même probabilité de s'arrêter devant le repère.
2 secteurs sont jaunes (marqués J sur la figure)
3 secteurs sont rouges (marqués R sur la figure)
1 secteur est bleu (marqué B sur la figure)

La règle du jeu est la suivante : pour participer au jeu, le joueur doit miser une certaine somme et si le jaune sort, il gagne 20 €, si le bleu sort, il gagne 30 €, si le rouge sort, il ne gagne rien.

1. Dans cette question, on suppose que la mise est de 10 €. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque arrêt de la roue associe le gain effectif (positif ou négatif) du joueur. (Par exemple, si le bleu sort, le gain effectif pour le joueur est de 20 €.
   a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer son espérance mathématique.
2. L'organisateur du jeu ne souhaite pas que l'espérance de gain du joueur sait positive. à quelle valeur minimale, exprimée par un nombre entier d'euros, doit-il fixer le montant de la mise?

EXERCICE 2 — 5 points

1. Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 9z - 10$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
   a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.
   b. Calculer $P(2)$.
   c. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   d. Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
   On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
   $$z_{\text{A}} = 2 \quad ; \quad z_{\text{B}} = 1 + 2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{C}} = 1 - 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}.$$
   a. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe (sur papier millimétré).
   b. Calculer les modules des nombres complexes $z_{\text{A}} - z_{\text{D}}$, $z_{\text{B}} - z_{\text{D}}$ et $z_{\text{B}} - z_{\text{A}}$.
   En déduire la nature du triangle ABD.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : étude du signe de $x^3 - 1 + 2\ln(x)$

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,,+\infty[$ par

$$g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x.$$

($\ln x$ désigne le logarithme népérien de x)

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction g. (Les limites ne sont pas demandées).
3. Calculer $g(1)$.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,,+\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$. Y a-t'il une autre asymptote à $(\mathscr{C})$? Si oui, donner son équation.

   c. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

   d. En utilisant les résultats de la **partie A**, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

   e. Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe $(\mathscr{C})$. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).

   f. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites (D) et (T).

2. **a.** Montrer que la fonction H définie par

   $$H(x) = -\frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

   est une primitive de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

   b. Soit Δ le domaine plan limité par (D), $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{\mathrm{e}}$. Hachurer Δ ; calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de Δ ; en donner une valeur approchée au mm^2.

Baccalauréat STI Métropole septembre 2002
Génie énergétique, civil, mécanique

EXERCICE 1 **5 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est rapporté un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

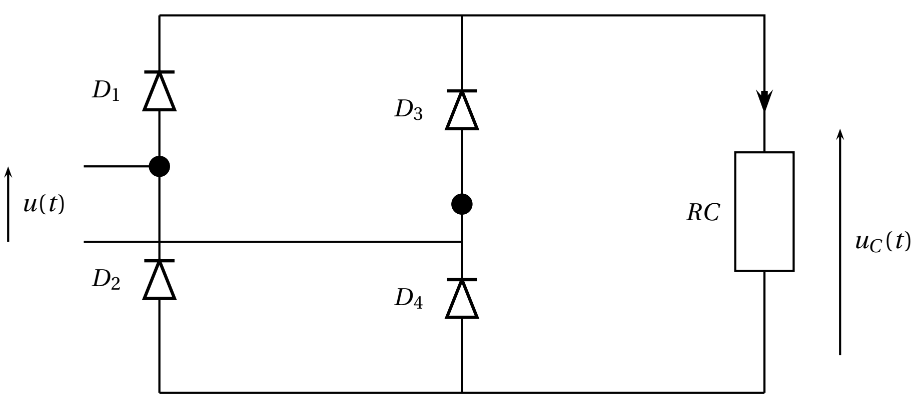
1. Soit P le polynôme défini par $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$.
   a. Trouver la valeur du nombre réel a, tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z+2)\left(z^2 + az + 8\right)$.
   b. Résoudre alors l'équation : $P(z) = 0$.
2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2+2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = 2-2\text{i} \quad ; \quad ;\text{C} = -2.$$

   a. Donner la forme trigonométrique de z_{A}, z_{B} et z_{C}.
   b. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
3. Soit B$'$ le point d'affixe 4i.
   a. Trouver l'affixe du point Ω milieu de [BB$'$].
   b. Montrer que les pointa B, B$'$ et C appartiennent à un cercle de centre Ω dont on déterminera le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

On désire redresser une tension sinusoïdale alternative à l'aide d'un montage redresseur à diodes :



La tension $u(t)$ est exprimée en volts et t en secondes.
La courbe représentant la tension $u(t)$ relevée à l'oscilloscope est donnée, en annexe.
L'intervalle $\left[0~;~2\cdot 10^{-2}\right]$ correspond à une période de la fonction u.

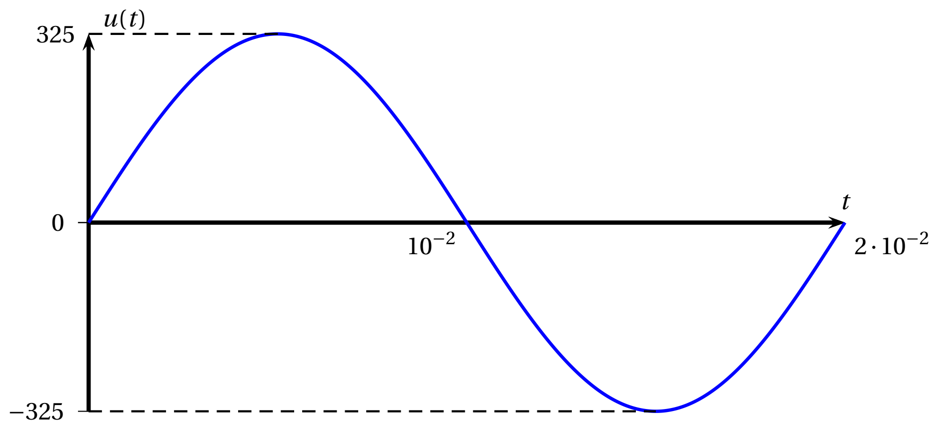
1. $u(t)$ est de la forme $u(t) = \text{U}\sin(\omega t + \varphi)$, où U et ω sont des réels strictement positifs et φ un réel appartenant à $]-\pi~;~\pi]$.
   On suppose, conformément à la représentation graphique de la fonction
   $t \mapsto u(t)$, que $u(t)$ est nulle pour $t = 0$, pour $t = 10^{-2}$ et pour $t = 2\cdot 10^{-2}$ et que la valeur maximale de $u(t)$ est 325.
   Déterminer, à l'aide de la courbe, la période T et le réel φ. On rappelle que T= $\dfrac{2\pi}{\omega}$; en déduire la valeur exacte de la pulsation ω.

2. On admet désormais que la tension $u(t)$ est donnée par $u(t) = 325\sin(100\pi t)$. La tension redressée $u_C(t)$ est telle que :
— si $t \in \left[0\,;\,10^{-2}\right]$, $u_C(t) = u(t)$,
— si $t \in \left[10^{-2}\,;\,2\cdot 10^{-2}\right]$, $u_C(t) = -u(t)$.

   a. Sur le dessin donné en annexe, tracer la représentation graphique de u_C sur l'intervalle $\left[0\,;\,2\cdot 10^{-2}\right]$. (Cette feuille est à rendre avec la copie.)

   b. Calculer la valeur moyenne de la tension redressée $u_C(t)$ sur $\left[0\,;\,2\cdot 10^{-2}\right]$.

Annexe à rendre avec la copie



PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$, puis étudier le signe de $g'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de g (les limites en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées).
   Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : étude de f et représentation graphique

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire l'existence d'une droite asymptote à $\mathscr{C}$.
2. Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 5$ est te à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

4. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β $(\alpha < \beta)$ sur $]0~;~+\infty[$. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune d'elles.
6. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : étude d'une aire

1. Soit H la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
   Calculer $H'(x)$.
2. Soit $\mathscr{E}$ la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ la droite Δ et les droites d'équations $x = \text{e}$ et $x = 5$. (e : base du logarithme népérien).
   Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{E}$. En donner également une valeur approchée à 1 mm^2 près.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2002
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Une association propose chaque jour un spectacle au prix de 20 €. Pour en assurer la promotion, chaque client, à l'entrée, lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Les six résultats sont équiprobables :

- si le résultat est 6, l'entrée est gratuite ;
- si le résultat est 1, l'entrée est demi-tarif (10 €) ;
- dans les autres cas (2, 3, 4 ou 5), le client paie plein tarif (20 €).

Partie A

Un client se présente à l'entrée. Soit A l'évènement : « le client paie plein tarif ».

1. Déterminer la probabilité de A.
2. Énoncer par une phrase en français l'évènement contraire de A noté $\overline{A}$ puis déterminer la probabilité de $\overline{A}$.

Partie B

1. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat du dé, le prix payé par le client.
   a. Déterminer à l'aide d'un tableau de loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.
2. Avant promotion, le prix unique était 20 € et l'association avait en moyenne 80 clients par jour. Depuis la promotion, la clientèle a augmenté de 40 %.
   En utilisant la question précédente, indiquer si l'association peut espérer de meilleures recettes grâce à la promotion.

EXERCICE 2 **6 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$$z^2 + 8z + 17 = 0.$$
2. Soit $P(z) = z^3 + 2z^2 - 31z - 102$.
   Vérifier que $P(z) = (z-6)\left(z^2 + 8z + 17\right)$.
3. Utiliser les questions **1.** et **2.** pour résoudre sans calcul supplémentaire l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:
$$z^3 + 2z^2 - 31z - 102 = 0.$$

Partie B

1. **a.** Placer les points A, B et B′ d'affixes respectives :

$6 \qquad , \qquad -4+\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad -4-\mathrm{i}$

b. Pourquoi a-t-on $OB = OB'$?

c. Mettre sous forme algébrique $\dfrac{-4+i}{-4-i}$.

d. Quel est le module de $\dfrac{-4+i}{-4-i}$?

Déterminer à l'aide de la calculatrice, un argument de $\dfrac{-4+i}{-4-i}$ (on donnera l'arrondi à 10^{-2} près).

e. Déduire des questions b. et d., les mesures en degrés des angles du triangle ODB$'$. (On donnera les arrondis a l'unité).

2. Soit Ω le point d'affixe $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

a. Construire les points C et D, symétriques des points A et B par rapport à Ω.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

PROBLÈME — 9 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

1. Calculer $g(-1)$; déterminer les nombres réels a et b tels que

$$g(x) = (x+1)\left(x^2 + ax + b\right).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) \geqslant 0$.

Partie B

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^3 - 2x^2 + 5x - 4\right)e^x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans le repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier le limite de f en $+\infty$: on remarquera que, pour $x \neq 0$:

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)e^x.$$

2. Étudier la limite de f en $+\infty$ On admettra que, pour n entier naturel :

$$\lim_{x\to 0} x^n e^x = 0.$$

En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}$.

3. Déterminer la dérivée f' de f. Vérifier que $f'(x) = g(x)e^x$.

4. Étudier les variations de f à l'aide de la partie A puis dresser le tableau de variations de f où figurera la valeur exacte du minimum de f.

5. Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide de la calculatrice en donnant les arrondis de $f(x)$ à 10^{-1} près.

x	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$											

6. Calculer $f'(1)$; en donner l'arrondi à 10^{-1} près : puis tracer la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
7. Tracer $\mathscr{C}$.

Partie C

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(x^3 - 5x + 15x - 19\right) \mathrm{e}^x.$$

1. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer en cm^2 l'aire de la portion de plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$.
   En donner l'arrondi à 10^{-1} près.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2002
Génie électronique, électrotechnique, optique

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

Soit l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad 2y' + y = 0,$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation (E).
2. **a.** Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ dans le plan rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ passe par le point A $(\ln 9\ ;\ 1)$.

   b. Déterminer la dérivée de f et en déduire le coefficient directeur de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point A.
3. Montrer que la fonction g définie dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ est une autre solution de l'équation (E).

EXERCICE 2 **4 points**

La figure sera construite sur la copie et complétée au fil de l'exercice
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm.

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

   b. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$ et $z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{e}^{\frac{-5\mathrm{i}\pi}{6}}$.

   a. Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme algébrique.

   b. Dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, construire les points A et B à la règle et au compas.
   (On laissera apparentes les lignes de construction).
3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   a. On désigne par A′ l'image de A par la rotation r. Placer le point A′.
   Exprimer l'affixe $z_{\mathrm{A}'}$ du point A′ en fonction de celle du point A puis en déduire la forme exponentielle et la forme algébrique de $z_{\mathrm{A}'}$.

   b. Soit le point C d'affixe $z_{\mathrm{C}} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   Placer le point C dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   Montrer que C est l'image de B par la rotation r et écrire z_{C} sous la forme algébrique.

Problème **12 points**

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}.$$

1. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers -1.
2. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Soit g' la dérivée de g sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   a. Calculer $g'(x)$.
   b. En déduire que $g'(x)$ est strictement positif pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$.
   c. En déduire le sens de variations de g sur $]-1\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Calculer $g(0)$.
   b. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (2x+1)\ln(x+1) - x - 1$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers -1.
   b. En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote (D) dont on donnera une équation.
2. **a.** Vérifier que pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$ on a : $f(x) = x\left[\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\ln(x+1) - 1 - \dfrac{1}{x}\right]$.
   b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. **a.** Montrer que pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ on a $f'(x) = g(x)$.
   b. En déduire le tableau de variations de f.
4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions a et b sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   Donner pour chacune l'approximation décimale à 10^{-2} près par défaut.
5. Construire l'asymptote (D) et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (*utiliser la feuille de papier millimétré fournie*).

Partie C

Soit la fonction U définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$U(x) = \left(x^2+x\right)[\ln(x+1) - 1].$$

1. Montrer que U est une primitive de f sur $]-1\,;\,+\infty[$.
2. En déduire la valeur exacte en cm^2 de l'aire $\mathscr{A}$ de la portion du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. On donnera le résultat final sous la forme $n\ln 2 + p$ où n et p sont des nombres entiers relatifs.

Baccalauréat STI Métropole Génie électronique juin 2002

EXERCICE 1 **6 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm, on considère les points B, C, D, E et F, images respectives des nombres complexes :

$$z_{\text{B}} = 1 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{C}} = 3 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{D}} = 4,\ z_{\text{E}} = 3 - \text{i}\sqrt{3} \text{ et } z_{\text{F}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

1. Écrire les nombres complexes $z_{\text{B}},\ z_{\text{C}},\ z_{\text{D}},\ z_{\text{E}}$ et z_{F} sous forme trigonométrique.
2. Construire à la règle et au compas les points B, C, D, E et F dans le repère $\left(\text{O},\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
3. Calculer les distances OB, BC et CD. En déduire les distances DE, EF et OF. Que constate-t-on ?
4. Calculer les mesures des angles $\left(\overrightarrow{\text{DC}},\,\overrightarrow{\text{DO}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{OE}},\,\overrightarrow{\text{OC}}\right)$, et $\left(\overrightarrow{\text{OD}},\,\overrightarrow{\text{OC}}\right)$ en radians.
5. Quelle est la nature du triangle OCD ? Justifier la réponse.
6. Calculer les aires des triangles OCD et OBC.
   En déduire, en cm^2 l'aire du polygone OBCDEF.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$, où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $y' + y = 0$.
2. Déterminer les deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ est solution de l'équation (E).
3. **a.** Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = k\text{e}^{-x} + x - 1.$$

   Vérifier que la fonction f est solution de l'équation (E).

   b. Déterminer le réel k pour que $f(0) = 0$.
4. Dans cette question, on prend $k = 1$.

   a. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

   b. En déduire une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \text{e}^{x}(x + 3) - 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g en $-\infty$.
2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variations de g. En déduire le tableau de variation de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α qui appartient à l'intervalle]- 4, 0[.

4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ en fonction des valeurs de x.

Partie B : étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + (x+2)\mathrm{e}^{x}.$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
(Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées)

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$.
   c. Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (D) et $(\mathscr{C}_f)$.
2. En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = \mathrm{e}^{x}\left[\dfrac{-x}{\mathrm{e}^{x}} + (x+2)\right]$ déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Vérifier que pour tout x réel, on a $f'(x) = g(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ en son point A d'abscisse 0.
6. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
7. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, la courbe $(\mathscr{C}_f)$, la tangente (T) et l'asymptote (D).
   (Utiliser la feuille de papier millimétré fournie)

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

   Calculer $H'(x)$ puis en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer, en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ de la surface comprise entre la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -2$ et l'axe des ordonnées. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat STI La Réunion septembre 2002 ∾
Génie électronique électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4 points**

Dans l'urne A sont disposées 3 boules jaunes portant les indications + 3 ; −3 ; 1.
Dans l'urne B sont disposées 3 boules vertes portant les indications + 3i ; −3i ; i.
On tire une boule jaune puis une boule verte ; cela permet d'obtenir un nombre complexe z.
(Par exemple si on tire la boule jaune marquée 3 puis la boule verte marquée, i, le résultat est le nombre complexe $z = 3 + \mathrm{i}$.

1. Quels sont les différents résultats possibles ?

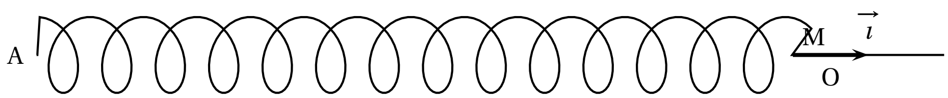
   On suppose dans tout, la suite que chacun de ces résultats a la même probabilité d'être obtenu.
2. Quelle est la probabilité p_1 que le nombre complexe obtenu ait un module égal à $3\sqrt{2}$.
3. Soit les quatre tirages z_A, z_B, z_C et z_D,de module $3\sqrt{2}$ et A, B, C et D les points d'affixes correspondantes.

   Représenter sur votre copie ces quatre points dans un plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique 2 cm) et montrer que A, B, C et D sont les sommets d'un carré.
4. On gagne la somme S, en euros, égale au carré du module du nombre complexe obtenu. Par exemple si le complexe obtenu est $z = 3 + \mathrm{i}$ alors $|z|^2 = 10$ et la somme S est 10 euros.

   Quelle est la loi de probabilité de S et quelle est l'espérance de gain au cours d'une partie ?

EXERCICE 2 **4 points**

Aucune connaissance de physique n'est nécessaire pour résoudre cet exercice



Un ressort à spires est attaché à son extrémité fixe A. On attache un mobile à son autre extrémité M. On admet que l'abscisse du point M dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ vérifie l'équation différentielle du second ordre (E) $\quad y'' + 9y = 8\sin t$, où y est une fonction du temps t (variable réelle positive).

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 9y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

   $$g(t) = A.\cos 3t + B.\sin 3t + \sin t \quad (A \text{ et } B \text{ réels})$$

   est une solution de l'équation différentielle (E).
3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le ressort étant compressé, le mobile passe en O avec une vitesse de 4 m.s^{-1}.

   On considère la fonction h définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par :

   $$h(t) = A.\cos 3t + B.\sin 3t + \sin t.$$

   Déterminer A et B pour que h soit la solution de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales : $h(0) = 0$ et $h'(0) = 4$.

4. On admet dans cette question que :

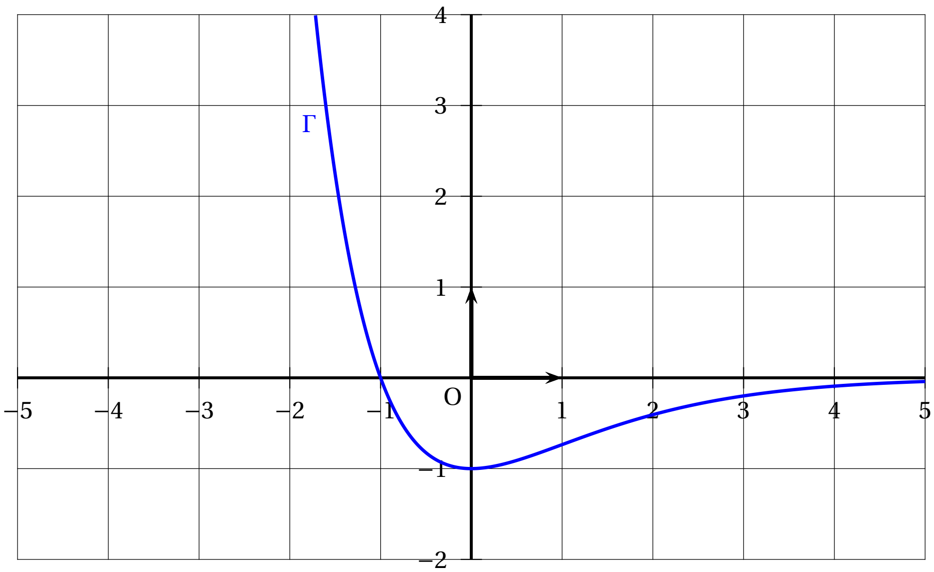
$$\sin 3t = -4\sin^3 t + 3\sin t.$$

Chercher les instants t où le mobile repasse par le point de départ, c'est-à-dire résoudre dans l'ensemble $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $h(t) = 0$.

PROBLÈME **12 points**

Sur le graphique ci-dessous, Γ est la courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (figure 1).
On suppose que

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone sur les intervalles $]-\infty\,;\,0]$ et $[0\,;\,+\infty[$,
- $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Γ passe par les points $\mathrm{A}(-1\,;\,0)$ et $\mathrm{B}(0\,;\,-1)$.
- la droite d'équation $y = -1$ est tangente à la courbe Γ au point B.
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$,
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe lorsque x tend vers $+\infty$.



Première partie : travaux sur f

A. Gestion des données

1. Quelles sont les valeurs numériques de $f(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(0)$? Justifier votre réponse.
2. Quelle est la limite de f en $+\infty$. Justifier votre réponse.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f.
4. Donner le signe des nombres dérivés $f'(-2)$ et $f'(3)$ en justifiant votre réponse.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$
   — l'équation $f(x) = 0$,
   — l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

B. Détermination de l'expression de $f(x)$

On suppose que $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux constantes réelles, et x la variable réelle.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel en fonction de a et de b.

2. En utilisant la question A. 1. précédente, déterminer les valeurs de a et de b.

Deuxième partie : travaux sur une primitive de f sur $\mathbb{R}$

A

1. Donner le signe de f d'après la courbe Γ donnée par la figure 1.
2. Justifier pourquoi, parmi les courbes proposées sur l'annexe, les courbes $\mathscr{C}_G$ et $\mathscr{C}_H$, ne peuvent pas représenter une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   (On appelle F une primitive de f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_F$ est également tracée sur l'annexe (figure 2).

B

1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_F$ en son point d'abscisse 0.
2. Déterminer (sans chercher l'expression de $F(x)$ en fonction de x l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la portion du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

Troisième partie : étude de la fonction F sur $\mathbb{R}$

On suppose désormais que, pour tout x réel, $F(x) = (x+2)\text{e}^{-x}$. **A**

1. Calculer $F'(x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.
3. **a.** Montrer que pour tout x réel on a $F(x) = \dfrac{x}{\text{e}^x} + \dfrac{2}{\text{e}^{-x}}$.

   b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

   c. En déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera une équation.

B. On se propose dans cette question de déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = 3x + 6$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+2)\left(\text{e}^x - 3\right) = 0$.
2. En déduire les coordonnées des points recherchés.

Annexe

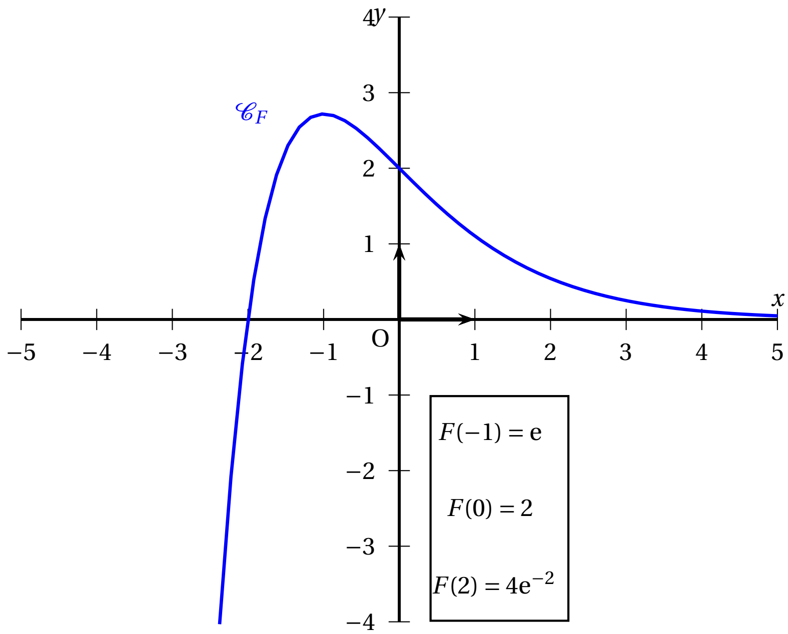


Figure 2 : fonction F

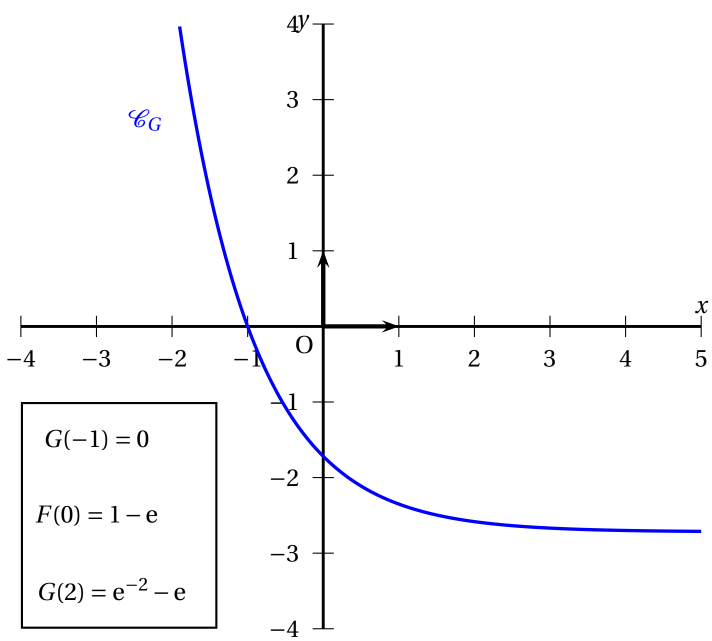


Figure 3 : fonction G

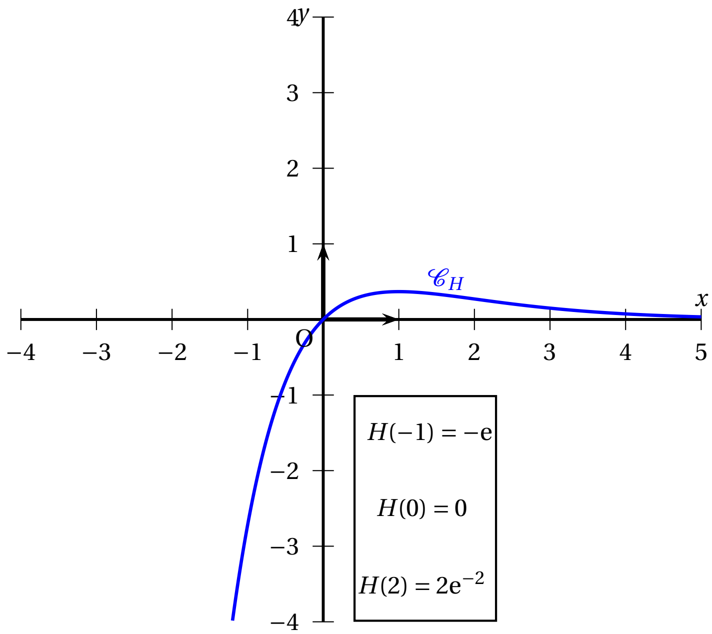


Figure 4 : fonction H

Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie
Génie électronique, électrotechnique, optique novembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
   Soient z_1 et z_2 les solutions, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est positive.
2. Écrire z_1 puis z_2 sous la forme $re^{\mathrm{i}\theta}$ où r est un nombre réel positif, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ et θ un nombre réel (r représente donc le module du nombre complexe et θ un argument).
   En déduire que $\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
3. Dans le plan $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, construire géométriquement les points A_1 et A_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 (on n'utilisera pas de valeurs approchées).
   Montrer l'existence d'une rotation de centre O qui transforme A_2 en A_1.
   Déterminer l'angle α de cette rotation.
4. On note A_0 l'image de A_1 par la rotation de centre O et d'angle α.
   Construire géométriquement A_0.
   Déterminer l'affixe du point A_0.
5. Quelle est la nature du quadrilatère $\mathrm{OA_0A_1A_2}$? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Un dé cubique est truqué. Une partie consiste à lancer le dé et à noter le numéro de la face supérieure. Soit X la variable aléatoire égale à ce numéro. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
$P(X = i)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 10 euros.
Il reçoit 20 euros si le numéro est 1 ou 6, 10 euros si le numéro est 3 ou 4, 0 euro si le numéro est 2 ou 5.
Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit et ce qu'il mise (le gain peut donc être soit positif soit négatif). Soit Y la variable aléatoire égale au gain du joueur au cours d'une partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
2. Déterminer la loi de probabilité de Y.
3. Calculer l'espérance mathématique de Y.
4. On rappelle qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance du gain est nulle.
   Pour le jeu décrit ci-dessus, on se propose de modifier la mise. La nouvelle mise est notée m et est exprimée en euros.
   Quelle valeur faut-il donner à m pour rendre le jeu équitable ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A : étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \frac{1}{2\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}.$$

$\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. **a.** Démontrer que la droite D_1 d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

   b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D_1
3. Pour tout réel x, M désigne le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et M' le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $-x$.

   a. Déterminer, en fonction de x, les coordonnées du point I milieu du segment $[MM']$.

   b. Que constatez-vous ? Qu'en déduisez-vous pour la courbe $\mathscr{C}$?
4. **a.** Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\left(\mathrm{e}^{x}+1\right).}$$

   b. Démontrer que la droite D_2 d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

   c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D_2.
5. Soit f' la dérivée de f.

   Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x} + 2}{2\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^{2}}$.

   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

   Dresser le tableau de variations de la fonction f.
6. Tracer D_1, D_2 et $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm.

Partie B : calcul d'une primitive

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}$$

1. Vérifier que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}$.
2. En déduire une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

∽ Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2002 ∽
Génie mécanique, des matériaux

EXERCICE 1 — 4 POINTS

Un sac contient 100 boules. Sur chacune de ces boules est inscrit l'un des numéros ⓪, ①, ②, ③ ou ④.
Le tableau ci-dessous donne la répartition de ces boules suivant leur numéro.

Numéro inscrit sur la boule	⓪	①	②	③	④
Nombre de boules	30	25	20	15	10

Un joueur tire au hasard une boule de ce sac.
On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1. On note p_n la probabilité que ce joueur tire une boule portant le numéro n. Écrire les nombres $p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3$ et p_4. Justifier que ces nombres sont, dans cet ordre, les cinq premiers termes d'une suite arithmétique dont on précisera la raison.
2. On convient de la règle du jeu suivante :
   Soit n la numéro de la boule tirée par le joueur.
   Si le numéro n est impair, le joueur perd n euros. Son gain est alors $-n$.
   Dans tous les autres cas, le joueur gagne n euros. Son gain est n.
   a. Quelle est la probabilité que, à l'issue d'un tirage, ce joueur gagne au moins un euro ?
   b. Quelle est la probabilité que, à l'issue d'un tirage, ce joueur perde au moins un euro ?
   c. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque numéro de boule tirée, associe le gain du joueur. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

EXERCICE 2 — 4 POINTS

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

1. On considère le nombre complexe $Z = \dfrac{2+\text{i}}{3-\text{i}}$.
   Calculer la forme algébrique de Z ; en déduire le module et un argument de Z.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives :
   $$\frac{1+\text{i}}{2} \text{ et } \frac{1-\text{i}}{2}$$
   Le point I est le milieu du segment [AB].
   a. Placer les points A, B et I.
   b. Calculer l'affixe du point I.
3. Soit C le point d'affixe :
   $$z_{\text{C}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}.$$
   a. Calculer les coordonnées du point C.
   b. Montrer que les points A, B et C sont situés sur un même cercle de centre I.
   Construire le cercle et placer le point C.

c. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.

PROBLÈME 12 POINTS

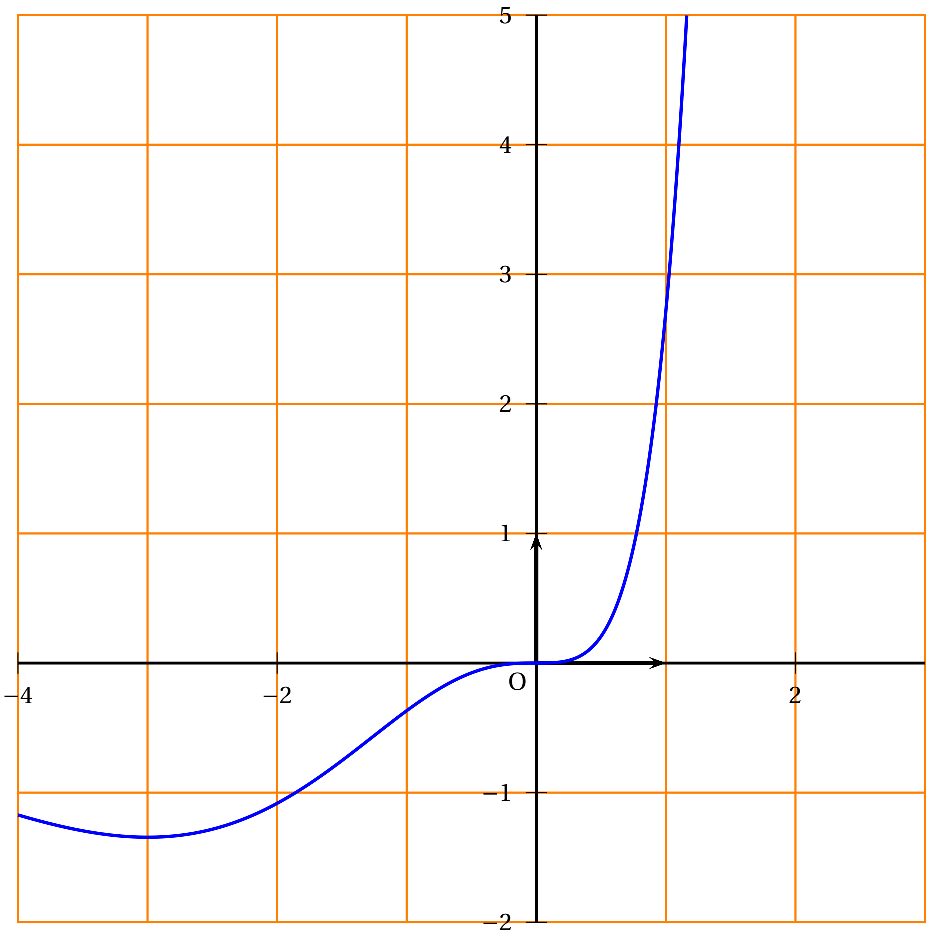
Le graphique est à complète, au fur et à mesure de la résolution du problème, et à rendre avec la copie.
Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
L'unité de longueur est 2 cm.

Partie A

On considère la fonction f définie, pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 e^x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
2. Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ en lesquels cette courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à 0. Tracer ces tangentes sur la feuille annexe

Partie B

Soit g la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 e^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. En déduire une équation d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$.

   b. Calculer la limite de g en $-\infty$.

2. On note g' la fonction dérivée de g.

   a. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.

   b. Montrer que. pour tout nombre réel x :

$$g'(x) = x^2 \text{e}^{-x}(3 - x).$$

   c. Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

   d. Déterminer les variations de la fonction g.

Partie C

1. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$f(x) - g(x) = x^3 \text{e}^{-x}\left(\text{e}^{2x} - 1\right)$$

   b. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$.

   c. Comparer $f(0,0001)$ et $g(0,001)$ puis $f\left(-10^{-4}\right)$ et $g\left(-10^{-4}\right)$.

2. Soit a un réel. On considère le point M de coordonnées $(a\,;\ f(a))$ et le point N de coordonnées $(-a\,;\ g(-a))$.

   Démontrer que le milieu du segment $[MN]$ est le point O.

Partie C

On admet dans la suite du problème que la courbe $\mathscr{C}_g$ est la courbe symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'origine du repère.

1. La fonction F est définie, pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\text{e}^x.$$

   Vérifier que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer les deux intégrales $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\text{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\text{d}x$.

3. Compléter le graphique par un dessin de $\mathscr{C}_g$.

4. On considère la région $\mathscr{A}$ du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

   a. Hachurer $\mathscr{A}$ sur le graphique.

   b. Déduire de la question 2 la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{A}$ en cm^2.

∽ Baccalauréat STI Métropole juin 2002 ∾
Génie mécanique, génie des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2.$$

1. **a.** Montrer que 2 est une solution de l'équation $f(x) = 0$.
   b. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}$:
   $$f(x) = (x-2)\left(ax^2 + bx + c\right).$$
   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. En utilisant les résultats de la question 1., résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes
   a. $4\ln^3 x - 8\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$;
   b. $4\text{e}^{2x} - 8\text{e}^x - 1 + \dfrac{2}{\text{e}^x} = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad ; \quad z_2 = 4 \quad ; \quad z_3 = 2\left(1 + 4\text{e}^{4\text{i}\frac{\pi}{3}}\right).$$

On appelle M_1, M_2 et M_3 leurs images respectives dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1 et de z_3.
2. Placer les points M_1, M_2 et M_3 et dans le plan $\mathscr{P}$.
3. **a.** Calculer sous forme trigonométrique les nombres complexes :
   $$z_1 - 2 \quad ; \quad z_2 - 2 \quad ; \quad z_3 - 2.$$
   b. En déduire que les trois points M_1, M_2 et M_3 sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Montrer que le triangle $\text{M}_1\text{M}_2\text{M}_3$ est rectangle.

PROBLÈME **10 points**

Le but de ce problème est l'étude de la conception, des caractéristiques et de la commercialisation d'une bobine de fil.

Partie A - Détermination d'une fonction f nécessaire à la conception d'une bobine

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,4]$, par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
On impose les conditions suivantes

- $f(0) = 2$;
- $f(2) = 1$;
- La courbe $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse 2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. Calculer a, b et c pour que les trois conditions précédentes soient remplies et en déduire que pour tout x de l'intervalle $[0~;~4]$, $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 2$.

2. Montrer que la fonction admet sur $[0 ; 4]$ un minimum que l'on précisera.

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie B - Conception et étude des caractéristiques de la bobine

Soit Δ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.
La rotation de la partie Δ autour de l'axe des abscisses engendre un solide (B).
Ce solide est la bobine ci-dessous dessinée, à gauche (fig. 1)

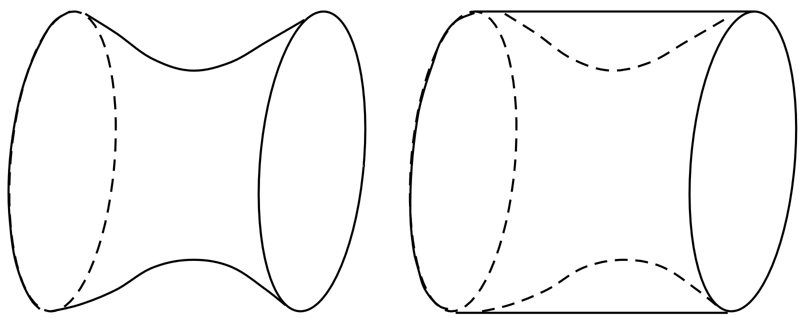


fig. 1 : bobine sans fil fig. 2 : bobine avec fil

1. **a.** Hachurer la partie Δ sur le graphique.

b. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$[f(x)]^2 = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 4x + 4.$$

c. En déduire la valeur exacte en cm^3 du volume V_1 de la bobine sans fil. (On rappelle que :

$$\text{V}_1 = \pi \int_0^4 [f(x)]^2\,\text{d}x.$$

2. Lorsque le fil est placé sur la bobine, l'ensemble « bobine avec fil » est assimilé à un cylindre (voir fig. 2).

a. Calculer la valeur exacte, en cm^3, du volume V_2 de ce cylindre.

b. En déduire la valeur exacte, en cm^3 du volume V occupé par le fil sur la bobine.

3. Le fabricant affirme que la bobine ainsi constituée contient 200 m de fil cylindrique de diamètre 0,4 mm.
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Partie C - Commercialisation des bobines

À l'issue de la fabrication, une bobine de fil peut présenter 0, 1, 2 ou 3 défauts ;

- 90 % des bobines de fil ont 0 défaut ;
- 5 % des bobines de fil ont 1 défaut ;
- 3 % des bobines de fil ont 2 défauts ;
- 2 % des bobines de fil ont 3 défauts.

1. On choisit au hasard une bobine de fil. Calculer la probabilité qu'elle présente au plus un défaut.

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque bobine de fil choisie au hasard, associe le nombre de ses défauts.

a. Définir à l'aide d'un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.

3. Le prix de vente d'une bobine de fil dépend du nombre de défauts qu'elle présente comme l'indique le tableau suivant :

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix (en euros)	5	3	2	1

Soit Y la variable aléatoire qui à chaque bobine de fil choisie au hasard associe son prix,

a. Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

b. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Y)$ de Y. Que représente $\mathrm{E}(Y)$?

Baccalauréat STI Métropole septembre 2002
Génie mécanique B, C, D, E, des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3} + 2\text{i et } z_2 = 2\sqrt{2} - 2\text{i}\sqrt{2}.$$

1. Donner le module et un argument des deux nombres complexes z_1 et z_2. En déduire le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm. Utiliser les résultats obtenus dans la question 1, pour placer les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 en faisant apparaître les traits de construction.
3. Vérifier que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \text{i}\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. En comparant les formes algébrique et trigonométrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$ donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$
4. Soit C le point d'affixe $z_3 = 4\dfrac{z_1}{z_2}$. Placer le point C sur la figure faite à la question 1.
5. Montrer que les trois points A, B et C sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle

$$4y'' + 9y = 0 \quad \text{(E)}$$

où y désigne une fonction numérique de la variable réelle x, deux fois dérivable, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Soit g la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par : $g(x) = 2\cos\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
   Vérifier que g est une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que : $f(\pi) = 1$ et
   $f'\left(\dfrac{5\pi}{9}\right) = 0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
4. Montrer que $f = g$.

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est de déterminer la valeur exacte de l'aire de la région grisée sur la figure en annexe. Cette région est limitée par l'axe des ordonnées et deux morceaux de courbes symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère la fonction f définie, pour tout nombre réel x, par

$$f(x) = \frac{4 - \mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporte à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 2 cm. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée sur la figure en annexe.

Partie A : étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement pour $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra vérifier que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{-x} - 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$. Que peut-on déduire graphiquement pour $\mathscr{C}$?
3. Déterminer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f. étudier le signe de f'. En déduire le tableau de variations de f sur l'ensemble des nombres réels ,
4. **a.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.

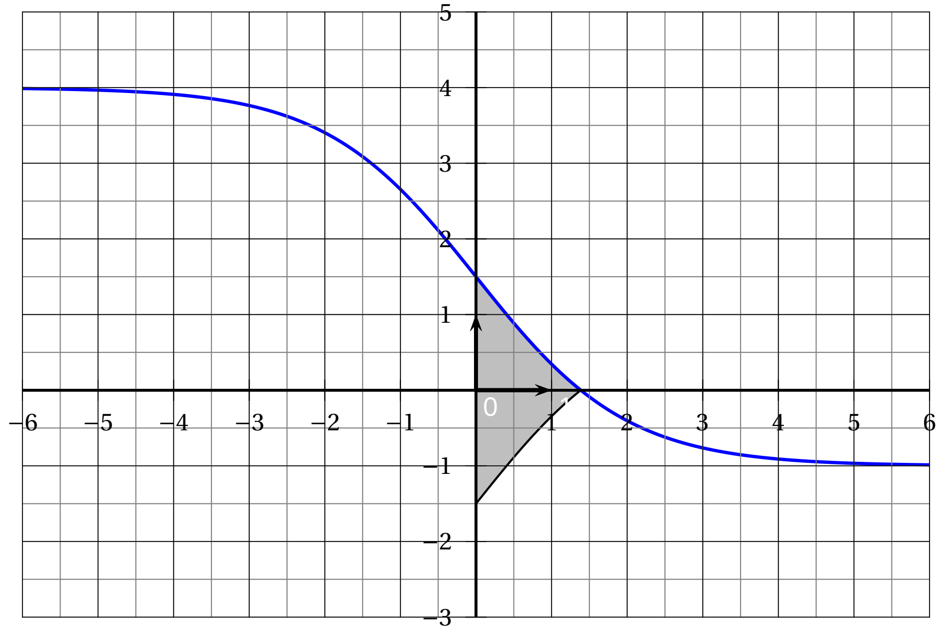
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4 - \mathrm{e}^x = 0$. En déduire que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point B dont on déterminera les coordonnées.
5. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,2\ln 2]$, on a $f(x) \geqslant 0$.
6. Placer les points A et B, puis tracer les droites asymptotes de $\mathscr{C}$ sur la figure en annexe à joindre à la copie.

Partie B : calcul de l'aire de la région grisée

1. Montrer que la fonction numérique F définie, pour tout nombre réel x, par $F(x) = 4x - 5\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la valeur exacte, en unités d'aires, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, les deux axes du repère et la droite d'équation $x = 2\ln 2$.

   En déduire la valeur exacte, en cm^2, de l'aire de la région grisée, puis sa valeur arrondie au mm^2 près.

Annexe à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie novembre 2002 ∾
Génie des matériaux, mécanique A et F

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, l'unité graphique étant le centimètre.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$(z-11\mathrm{i})\left(z^2-16z+89\right)=0.$$

2. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 8-5\mathrm{i}$, $z_B = 8+5\mathrm{i}$ et $z_C = 11\mathrm{i}$.

a. Placer A, B et C. La figure sera complétée au fur et à mesure des questions.

b. Calculer $|z_C - z_B|$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

c. Démontrer que ABC est un triangle isocèle.

3. D est le point d'affixe $z_D = -2$ et B′ le milieu du segment [AC].

a. Calculer l'affixe du point B′.

b. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DB'}$.

c. En déduire que les points D, B et B′ sont alignés.

d. En déduire que (DB) est la médiatrice du segment [AC].

4. Justifier que la droite (DO) est une médiatrice du triangle ABC.

5. Quel est le centre du cercle passant par A, B et C ?

EXERCICE 2 **5 points**

Lors de la « foire aux affaires », dans un magasin de bricolage, un client s'intéresse à une meuleuse d'angle et à une scie sauteuse. On admet, pour ce client, les hypothèses suivantes :
- La probabilité qu'il achète la meuleuse d'angle est $0,60$.
- La probabilité qu'il achète la scie sauteuse est $0,46$.
- La probabilité qu'il achète la meuleuse d'angle ou la scie sauteuse est $0,64$.

On désigne par M l'évènement « le client achète la meuleuse d'angle » et par S l'évènement « le client achète la scie sauteuse ».

1. Quelques calculs préliminaires :

a. Calculer la probabilité de l'évènement « le client n'achète pas la meuleuse d'angle ».

b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le client achète la meuleuse d'angle et la scie sauteuse » est $0,42$.

c. Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{M} \cap S$.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	M	$\overline{M}$	
S	0,42		0,46
$\overline{S}$			
	0,60		1

3. La meuleuse d'angle coûte 12,96 € et la scie sauteuse 15,09 €. On désigne par D la variable aléatoire égale à la dépense, en euros, du client.

a. Déterminer les différentes valeurs de la variable aléatoire D.

b. Établir la loi de probabilité de D.

c. Calculer l'espérance mathématique de D. On en donnera l'arrondi au centime d'euro.

d. Quel chiffre d'affaires le magasin peut-il espérer réaliser si 50 clients, intéressés par ces deux appareils, se présentent pendant cette « foire aux affaires » ?

PROBLÈME **10 points**

Première partie :

Soit p la fonction polynôme définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$p(X) = 3X^3 - 7X^2 + 4.$$

1. Montrer que pour tout nombre réel X, $p(X) = (X-1)\left(3X^2 - 4X - 4\right)$.

2. Factorisation de p :

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3X^3 - 7X^2 + 4 = 0$.

b. En déduire une écriture de $p(X)$ sous la forme d'un produit de trois polynômes du premier degré.

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x,

$$3\mathrm{e}^{3x} - 7\mathrm{e}^{2} + 4 = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)\left(3\mathrm{e}^{x} + 2\right).$$

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ l'équation $3\mathrm{e}^{3x}x - 7\mathrm{e}^{2x}x + 4 = 0$.

c. Étudier le signe de $3\mathrm{e}^{3x} - 7\mathrm{e}^{2x} + 4$ pour x appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}$.

Deuxième partie :

On considère l'équation différentielle $E\ :\ y' + 2y = 0$.

1. Résoudre l'équation E ;

2. Déterminer la solution particulière f de l'équation E vérifiant $f(\ln 2) = 1$, ou ln représente la fonction logarithme népérien.

Troisième partie :

On appelle f et g les fonctions respectivement définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{et} \quad g(x) = 7 - 3\mathrm{e}^{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Unités graphiques : 6 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

1. Limites et asymptotes

a. Calculer les limites de f et de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. En déduire pour chacune des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, l'existence d'une droite asymptote nommée D pour la courbe $\mathscr{C}$ et D$'$ pour la courbe $\mathscr{C}'$. Donner une équation pour chacune de ces droites.

2. Variations

a. Étudier les variations de f et de g sur $\mathbb{R}$.

b. Dresser les tableaux de variation de f et g.

3. Positions respectives de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$.

a. Montrer que pour tout nombre réel x,

$$f(x) - g(x) = \text{e}^{-2x}\left(3\text{e}^{3x} - 7\text{e}^{2x} + 4\right).$$

b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$.

c. Justifier que sur l'intervalle $[0\ ;\ \ln 2]$, $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{C}'$.

4. Construire D, D$'$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dans le repère orthogonal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ dont on rappelle que les unités graphiques sont 6 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

5. On désigne par $\mathscr{P}$ le domaine plan limité par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

a. Hachurer $\mathscr{P}$.

b. Calculer la valeur exacte, en cm^2 , de l'aire de $\mathscr{P}$. En donner l'arrondi au mm^2.