✤ Baccalauréat STI 2003 ✤
L'intégrale de juin à novembre 2003

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat STI Métropole juin 2003 ∾
Arts appliqués

EXERCICE 1 **8 points**

Dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, placer les quatre points A(5; 0), B(0; 3), A′(−5 ; 0) et B′(0 ; −3).

1. Donner l'équation de l'ellipse (E) de centre O et d'axes [AA′] et [BB′].
2. Montrer que si le point $M(x\,;\,y)$ est sur (E), alors $M_1(-x\,;\,y)$, $M_2(-x\,;\,-y)$ et $M_3(x\,;\,-y)$ sont aussi sur (E).
3. Tracer l'ellipse (E).
4. Calculer les coordonnées des deux foyers F et F′; les placer.
5. On donne $\text{M}\left(3\,;\,\dfrac{12}{5}\right)$
   a. Calculer les longueurs MF, MF′ puis MF + MF′.
   b. Que remarque t-on ?

EXERCICE 2 **12 points**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,10[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x+4}$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f en −4.
2. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ dont on précisera une équation.

Partie B

1. Vérifier que la dérivée f' de la fonction f est définie par
$$f'(x) = \frac{(x+1)(x+7)}{(x+4)^2}.$$
   Étudier son signe et dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec les axes du repère.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse 2.
4. Tracer dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ la courbe $(\mathscr{C})$, la tangente (T) et l'asymptote.

Partie C

1. **a.** Montrer que $f(x) = x - 6 + \dfrac{9}{x+4}$.
   b. En déduire une primitive F de f sur $]-4\,;\,10[$.
2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 5$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat STI Métropole septembre 2003 ∽
Arts appliqués

EXERCICE 1 **8 points**

Un sondage réalisé auprès de 600 jeunes qui partent en vacances révèle que parmi eux :

- Un tiers part avec des amis,
- 70 % restent en France.
- Parmi ceux qui vont en vacances à l'étranger, 20 % partent avec des amis.

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

	Avec des amis	Sans les amis	Total
En France			
à l'étranger	36		
Total			600

2. On choisit un jeune au hasard parmi ces 600 jeunes. On considère les évènements suivants :

F : « Le jeune choisi reste en France »

A : « Le jeune choisi part avec des amis ».

a. Définir par une phrase les évènements $\overline{F}$, $F \cup A$.

b. Calculer les probabilités des évènements suivants : $\overline{F}$, $F \cap A$, $F \cup A$. (On écrira les résultats sous forme de fraction irréductible).

3. On choisit un jeune parmi ceux qui partent sans les amis. Déterminer la probabilité pour que ce jeune aille à l'étranger.

EXERCICE 2 **12 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\text{I} = \left[\frac{3}{4}\,;\,4\right]$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

1. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$.

2. Pour x appartenant à I, résoudre l'inéquation : $1 - 2\ln x > 0$.
En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$ sur I.

3. Donner le tableau des variations de f et donner une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum.

4. Montrer, en utilisant le tableau des variations, que l'équation $f(x) = 0,1$ admet deux solutions dans I.
À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée, à 10^{-2} près, de chacune de ces solutions.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unités : 4 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie B

Une petite entreprise fabrique et vend des boîtes de jeu.
Lorsqu'elle vend x centaines de ces boîtes ($x \leqslant x \leqslant 4$), le bénéfice net $B(x)$ réalisé s'exprime en milliers d'euros, par : $B(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.
Déterminer :

1. Le nombre minimum de boîtes de jeu à vendre pour que ce soit rentable.
2. Le nombre de boîtes de jeu à vendre pour que le bénéfice soit maximal. Quel est alors ce bénéfice ?
3. Le nombre de boîtes de jeu à vendre si l'entreprise veut gagner au moins 100 euros (on utilisera une méthode graphique en faisant apparaître sur la courbe les tracés utiles).

Baccalauréat STI La Réunion juin 2003
Génie énergétique, civil, mécanique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm. On note i le sombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit $P(z) = z^3 - \left(1+2\sqrt{3}\right)z^2 + \left(12+2\sqrt{3}\right)z - 12$ où z est un nombre complexe.
   a. Vérifier que $P(1) = 0$.
   b. Déterminer le réel b tel que $P(z) = (z-1)\left(z^2 + bz + 12\right)$.
   c. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z

$$z^2 - 2z\sqrt{3} + 12 = 0.$$

   d. Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan complexe, soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = \sqrt{3} + 3\text{i},\ z_{\text{B}} = 1,\ z_{\text{C}} = 4 + \left(1-\sqrt{3}\right)\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = \left(3+\sqrt{3}\right) + \left(4-\sqrt{3}\right)\text{i}.$$

   a. Placer ces quatre points dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
   b. Calculer les affixes des milieux des segments [AC] et [BD].En déduire que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
   c. Démontrer que ABCD est un carré.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle (E) : $9y'' + y = 0$ où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f qui vérifie les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Montrer que pour tout réel x, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

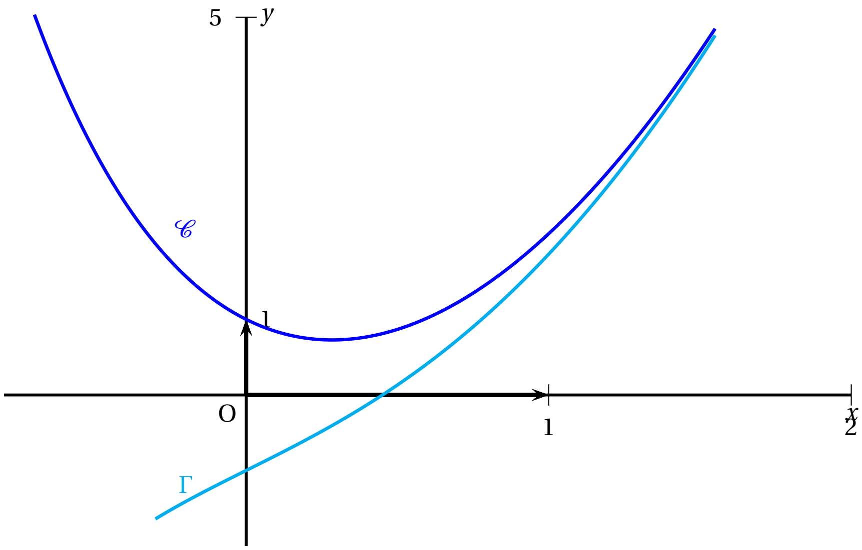
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

PROBLÈME **11 points**

On définit sur $\mathbb{R}$ deux fonctions f et g par

$$f(x) = 2x^2 + \text{e}^{-2x} \text{ et } g(x) = 2x^2 - \text{e}^{-2x}$$

Ces fonctions sont représentées par les courbes $\mathscr{C}$ et Γ dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ sur le graphique suivant :



Partie A

1. **a.** Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

   b. Associer alors à chaque fonction sa courbe représentative.

2. Justifier par le calcul que la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la courbe Γ.

Partie B : étude de la fonction f à l'aide d'une fonction auxiliaire h

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

   b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Soit la fonction auxiliaire h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x - \mathrm{e}^{-2x}$.
   Montrer que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; 1]$ et justifier que cette équation n'a pas d'autre solution dans $\mathbb{R}$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

   c. Déterminer le signe de $h(x)$ sur les intervalles $]-\infty ; \alpha[$ et $]\alpha ; +\infty[$.

4. **a.** Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 2h(x)$.

   b. Déduire des questions 3. c. et 4. a. le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Calculer une valeur approchée de $f(\alpha)$.

Partie C : comportement des courbes $\mathscr{C}$ et Γ pour x assez grand

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x) - g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) - g(x) \leqslant \dfrac{1}{10}$. Donner une interprétation graphique du résultat.

2. **a.** Pour tout λ réel strictement positif soit $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} \left[f(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x$.

   Montrer que $I(\lambda) = 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}$.

   b. Calculer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

∽ Baccalauréat STI Métropole juin 2003 ∾
Génie énergétique, génie civil, génie mécanique

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 6z + 34 = 0.$$

2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -3 + 5\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = 3 - 55\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = 4\mathrm{i}$.
   - **a.** Placer A, B et C dans le repère.
   - **b.** Calculer les modules des nombres complexes $z_{\mathrm{A}} - 3$, $z_{\mathrm{B}} - 3$ et $z_{\mathrm{C}} - 3$. En déduire que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   - **c.** Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Soit D le symétrique de A par rapport à C et E le symétrique de B par rapport à C. Placer les points D et E dans le repère. Montrer que ABDE est un losange.

EXERCICE 2 **5 points**

Soit (E) l'équation différentielle

$$y' + 2y = 0$$

où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Résoudre l'équation (E).
   b. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.
2. **a.** Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,10]$.
   b. Déterminer, en fonction de n, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$.
3. Soit (u_n), la suite définie par $u_n = n\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)\mathrm{e}^{-2n}$ pour tout n entier positif ou nul.
   - **a.** Calculer la valeur exacte de u_0, u_1 et u_2.
   - **b.** Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   - **c.** Déterminer la valeur exacte de la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{-3 - 2x}{\mathrm{e}^x}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

Partie A : étude de la fonction f

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. On précisera son équation.

2. Calculer $f'(x)$, où f désigne la fonction dérivée de f.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue x : $f(x) = 0$. En déduire, en fonction de x réel, le signe de $f(x)$.

5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère indiqué.

Partie B : Détermination d'une primitive et calculs d'aire

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{2x+5}{\mathrm{e}^x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Hachurer l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = 5$.

b. Calculer la valeur, en cm^2, de cette aire, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $g(x) = -f(x)$ et on appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction g. Tracer la courbe (Γ) dans le même repère que la courbe $(\mathscr{C})$.

b. Soit $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire du domaine compris entre les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ) et les droites d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = \alpha$ (où α est un réel positif donné). Calculer, en cm^2 et en fonction de α, la valeur de $\mathscr{A}(\alpha)$.

c. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Baccalauréat STI Polynésie juin 2003
Génie énergétique, civil

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes et donner les solutions sous forme algébrique :

a. $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b. $3z + 2 = (1 - \text{i})z - 7 + 13\text{i}$.

2. On considère les nombres complexes :

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -1 + 7\text{i} \quad ; \quad z_{\text{D}} = -3 + 3\text{i}.$$

On appelle A, B et D leurs images respectives dans le plan.

a. Déterminer le module et un argument de z_{A}.

b. Montrer que $z_{\text{D}} = 3\text{i}z_{\text{A}}$ puis en déduire le module et un argument de z_{D}.

c. Placer les points A, B et D dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

3. On pose $r = |z_{\text{D}} - z_{\text{B}}|$.

a. Interpréter géométriquement le nombre r.

b. Calculer r.

c. Montrer que le triangle ABD est rectangle et isocèle.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 produisent le même type de pièces. La production totale journalière est de 8 000 pièces. 40 % de la production provient de la machine M_1, le reste de la machine M_2.
Une pièce est susceptible de présenter deux types de défauts notés D_1 et D_2.
Concernant les pièces produites par la machine M_1 :

- 3 % présentent uniquement le défaut D_1,
- 2 % présentent uniquement le défaut D_2,
- 1 % présentent les deux défauts D_1 et D_2.

Concernant les pièces produites par la machine M_2 :

- 5 % présentent uniquement le défaut D_1,
- 1 % présentent uniquement le défaut D_2,
- 2 % présentent les deux défauts D_1 et D_2.

1. Après l'avoir reproduit sur votre copie, compléter le tableau suivant :

	Défaut D_1	Défaut D_2	Défauts D_1 et D_2	Aucun défaut	Total
Machine M_1	96				
Machine M_2		48			
Total					8 000

2. On tire au hasard une pièce parmi celles qui n'ont aucun défaut. Montrer que la probabilité qu'elle provienne de la machine M_1 est $\dfrac{47}{116}$.

3. On tire au hasard une pièce parmi les 8 000 produites dans la journée.
   Déterminer la probabilité des évènements A et B suivants :
   a. A : « La pièce n'a aucun défaut ».
   b. B : « La pièce a au moins un défaut ».
4. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage d'une pièce parmi les 8 000, associe le nombre de défauts de cette pièce.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer son espérance mathématique.

PROBLÈME **10 points**

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln x}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.

I. Première partie : étude d'une fonction auxiliaire g.

On appelle g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. (L'étude des limites aux bornes de l'intervalle n'est pas demandée).
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

II. Deuxième partie : étude de la fonction f

1. Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer $f(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif, puis en déduire que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. Construire le tableau de variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
5. Pour tout nombre réel x strictement positif, on pose $d(x) = f(x) - (2x - 2)$.
   a. Déterminer la limite de $d(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   b. En déduire que la droite (D), d'équation $y = 2x - 2$, est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (D).
6. Tracer les droites (T) et (D) puis la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.

III. Troisième partie : Calcul d'aire

1. On appelle h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$.
   Déterminer une primitive H de h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire une primitive F de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. Calculer en cm^2, la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

ANNEXE

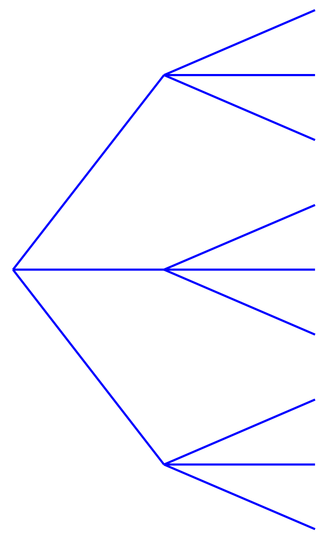


Tableau des valeurs de X

b \ a	0	1	2
0			
1			
2			

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie civil Métropole ∾ septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -1-\text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -1+\text{i} \quad ; \quad z_{\text{C}} = 1+\text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = z_{\text{B}} \times z_{\text{C}}.$$

où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_{D}.
2. **a.** Calculer le module et un argument de $z_{\text{A}},~z_{\text{B}}$ et z_{C}.
   b. En déduire le module et un argument de z_{D}.
3. Déduire des questions **1.** et **2.b.** les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$.
4. On considère les points E et F d'affixes $z_{\text{E}} = 1$ et $z_{\text{F}} = \dfrac{1}{2}\text{i}$. Placer les points A, B, C, D, E et F dans le plan $\mathscr{P}$.
5. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que les modules de $z_{\text{A}},~z_{\text{E}},~k \times z_{\text{D}}$ et z_{F} soient, dans cet ordre, quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle

$$9y'' + y = 0,$$

   où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la solution particulière f vérifiant

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

3. Montrer que pour tout x réel, on a :

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. **a.** Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer la valeur moyenne m de f sur $[0~;~2\pi]$. On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-3} prés.

PROBLÈME **11 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : Recherche d'une fonction

Soit g une fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c,$$

où a, b et c sont trois réels.
Déterminer a, b et c sachant que sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ passe par les points A(1 ; 2), B (e ; 0) et C$\left(\text{e}^3~;~2\right)$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2.$$

1. **a.** Calculer la limite de f en 0.
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout x de $]0~;~+\infty[$, on a :

   $$f(x) = \ln x(\ln x - 3) + 2.$$

2. **a.** Montrer que :

   $$f'(x)\frac{2\ln x - 3}{x}.$$

   où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   c. Dresser le tableau de variations de f sur $]0~;~+\infty[$.
3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue X :

   $$X^2 - 3X + 2 = 0.$$

   b. En déduire les solutions exactes dans $]0~;~+\infty[$ de l'équation : $f(x) = 0$.
   c. Déduire, des questions **2.c.** et **3.b.**, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. On note Γ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point d'abscisse e.
   b. Tracer la courbe Γ et la tangente Δ.

Partie C : Primitive et calcul d'aire

1. Montrer que la fonction, définie sur $]0~;~+\infty[$, par :

   $$x \longmapsto x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 5x,$$

   est une primitive sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto (\ln x)^2 - 3\ln x$.
2. En déduire la primitive F de f sur $]0~;~+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.
3. **a.** Hachurer la partie du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \text{e}$ et $x = \text{e}^2$.
   b. Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie hachurée. On en donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie septembre 2003
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

À tout point M d'affixe $z = x + \text{i}y$, distinct de O, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z. On pose dans la suite de l'exercice $z' = x' + \text{i}y'$ où x' et y' sont deux réels.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. On appelle A, B, C, D, les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = \text{i},\quad z_{\text{B}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i},\quad z_{\text{C}} = -1,\quad z_{\text{D}} = -2 - \text{i}.$$

   a. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes $z_{\text{B}'} = \dfrac{1}{\overline{z_{\text{B}}}}$ et $z_{\text{D}'} = \dfrac{1}{\overline{z_{\text{D}}}}$.
   b. Montrer que les points O, B et B′ sont alignés ainsi que les points O, D et D′.
   c. Calculer $|z_{\text{A}} - z_{\text{B}}|$, $\left|z_{\text{B}'} - z_{\text{B}}\right|$, $\left|z_{\text{D}'} - z_{\text{B}}\right|$ et en déduire que les quatre points A, B′, C, D′ sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
3. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, tracer le cercle $\mathscr{C}$.
4. Utiliser les questions précédentes pour construire géométriquement les points B′ et D′.

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne contient dix jetons indiscernables au toucher. Sur chacun de ces jetons est inscrit l'un des numéros 1, 2, 3 ou 4.
Un jeton porte le numéro 1, deux jetons le numéro 2, trois jetons le numéro 3 et 4 jetons le numéro 4.
Un jeu consiste à tirer au hasard et avec remise, deux jetons de cette urne ; les tirages sont supposés équiprobables. À l'issue de la partie, le joueur reçoit le nombre d'euros correspondant à la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés.

1. On appelle X la variable aléatoire qui, à l'issue de chaque partie, associe le nombre d'euros reçus par le joueur.
   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Calculer $p(X = 2)$, probabilité que la somme remise au joueur soit 2 €.
   c. Montrer que $p(X = 6) = \dfrac{25}{100}$.
   d. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. On présentera les résultats dans un tableau.
   e. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Le joueur doit verser une « mise » m exprimée en euros, avant chaque partie.
   Quelle doit être la valeur minimale de cette mise, arrondie à l'euro, pour que l'organisateur du jeu ait l'espoir d'être bénéficiaire ?

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

I. Première partie : étude d'une fonction g

On appelle g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$. (L'étude des limites aux bornes de l'intervalle n'est pas demandée).
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.

II. Deuxième partie : étude d'une fonction f

On appelle f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.
2. On appelle (D) la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 2$.
   - **a.** Démontrer que la droite (D) est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   - **b.** Étudier les positions respectives de la droite (D) et de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Le sens de variation de f
   - **a.** Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.
   - **b.** Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ et en déduire le sens de variations de f sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.
   - **c.** Dresser le tableau de variations de f.
4. On appelle (Δ) la tangente à $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse 1.
   - **a.** Déterminer une équation de (Δ).
   - **b.** Déterminer les coordonnées du point B de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente (T) est parallèle à (D).
5. Construire avec soin les droites (D), (Δ), (T) puis la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm.
6. Calcul d'aire.
   - **a.** On appelle k la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par $k(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
     Déterminer une primitive K de k sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.
   - **b.** Soit t un nombre réel strictement supérieur à 1. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(t)$ du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}$ la droite (D) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.
   - **c.** Déterminer t pour que $\mathcal{A}(t) = 100$ cm^2.

∽ Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie ∾
Génie mécanique, énergétique, civil novembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On note i nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Pour tout nombre complexe z on pose $P(z) = z^3 - 2z - 4$.

1. Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a $P(z) = (z-2)\left(z^2+2z+2\right)$.
2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.
3. On appelle A, B, C et D les points de $\mathscr{P}$ d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -1 - \text{i}~;~z_{\text{B}} = 2~;~z_{\text{C}} = 3 + 3\text{i}~;~z_{\text{D}} = 2\text{i}.$$

   a. Placer les points A, B C et D dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.
   b. Calculer $z_{\text{B}} - z_{\text{A}},~z_{\text{C}} - z_{\text{D}},~z_{\text{D}} - z_{\text{A}}$.
   c. Justifier alors que $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{CD}}$ et que AD = AB.
   d. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 2 **5 points**

On considère les intégrales I et J définies par $\text{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} x(\cos x)^2\,\text{d}x$ et $\text{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} x(\sin x)^2\,\text{d}x$.
Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs exactes de ces intégrales sans les calculer.

1. Déterminer la valeur exacte de I + J.
2. On se propose dans cette question de rechercher de la valeur exacte de I − J.
   a. Démontrer que $\text{I} - \text{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(2x)\,\text{d}x$.
   b. On appelle f la fonction numérique définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x).$$

   Démontrer que pour tout nombre réel $x,~f'(x) = x\cos(2x)$.
   c. En déduire la valeur exacte de I − J.
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs exactes des intégrales I et J.

PROBLÈME **10 points**

I) Première partie : étude d'une fonction g

On appelle g la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x) = (x+1)\text{e}^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$. (On pourra écrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = x\text{e}^x + \text{e}^x + 1$).
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Étude du signe de $g(x)$.

a. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x et étudier son signe sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

b. En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variations dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum de g.

c. Justifier que pour tout x, $g(x) > 0$.

II) Deuxième partie : étude et représentation graphique d'une fonction f

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^x + x - 3$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan, unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

2. On appelle (D) la droite d'équation $y = x - 3$.

a. Démontrer que la droite (D) est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (D). On précisera les coordonnées de leur point d'intersection I.

3. Étude des variations de f.

a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.

b. À l'aide des résultats obtenus dans la première partie, déterminer le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

5. Tracer la droite (D), la tangente (T) puis la courbe dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

III) Troisième partie : le but de cette partie est de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et de donner un encadrement de celles-ci.

1. En utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et en justifiant la réponse, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2. Localisation et encadrement d'une solution.

a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

b. Justifier les trois affirmations suivantes :
(1) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$.
(2) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
(3) L'équation $f(x) = 0$ a une solution unique notée α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

c. En expliquant brièvement la méthode utilisée, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

∽ Bac STI Antilles–Guyane – Juin 2003 ∾
Génie électronique

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.

Exercice 1 **5 points**

Soit la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2.$$

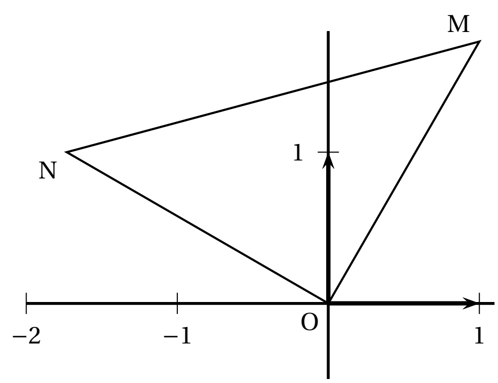
1. Vérifier que pour tout x réel, $P(x) = (x-1)\left(2x^2 + 5x + 2\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) : $P(x) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (2) : $\ln\left(4 - x^2\right) + \ln(2x+3) = \ln 5 + \ln(x+2)$.
4. Résoudre dans l'intervalle $[0~;~2\pi[$ l'équation
(3) : $2\cos^3(x) + 3\cos^2(x) - 3\cos(x) - 2 = 0$.

Exercice 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des trois questions suivantes, ***une ou plusieurs réponses sont exactes****.*
Vous indiquerez sur votre copie cette (ou ces) réponse(s) exacte(s). Aucune justification n'est demandée.

Question 1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, le triangle OMN est rectangle isocèle en O.
Le point M a pour affixe $Z_\text{M} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$, le point N a pour affixe $Z_\text{N} = \text{i}Z_\text{M}$.



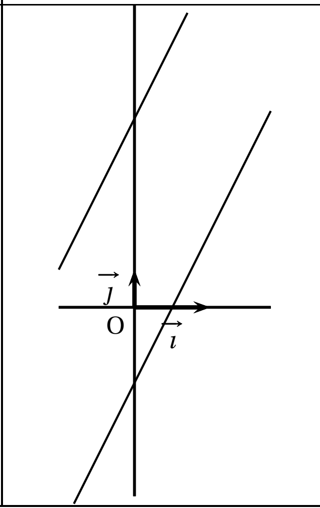
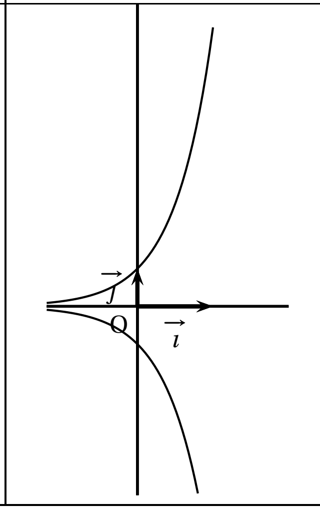
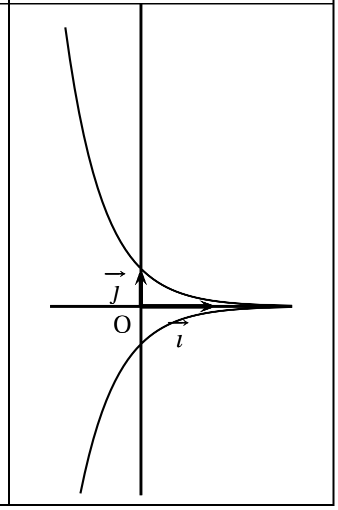
À quel nombre complexe Z_N est-il égal ?

Réponse	A	B	C	D
Expression de Z_N	$-\dfrac{3}{2} + \text{i}$	$-\sqrt{3} + \text{i}$	$\dfrac{-2 + 2\text{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \text{i}}$	$2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$

Question 2
Les nombres $\ln 6, \ln 18, \ln 54$ sont les termes consécutifs d'une suite, quelle est la nature de cette suite ?

Réponse	A	B	C
Nature de la suite	géométrique de raison 3	arithmétique de raison 3	géométrique de raison $\ln 3$

Question 3
On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 0$. Chaque figure ci-dessous comporte deux courbes. Indiquer, parmi les figures A, B ou C, celle(s) susceptible(s) de comporter les courbes représentatives de deux solutions de cette équation différentielle.

Réponse	A	B	C
Figure			

Problème **4 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x} - 3.$$

1. On appelle g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$ puis étudier son signe pour x appartenant à $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
3. Vérifier que $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - 3$, puis déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
5. Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, tel que $g(\alpha) = 0$.
6. À l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près, puis une valeur approchée de α à 10^{-3} près par excès.
7. Dresser le tableau donnant le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 3x + 4.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. On note f' la fonction dérivée de f, montrer que pour tout x réel $f'(x) = g(x)$.
2. En remarquant que pour tout réel x, $f(x) = x\left(\mathrm{e}^{-x} - 3\right) + 4$, déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Soit la droite Δ d'équation $y = -3x + 4$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Montrer que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$; étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.
4. Établir le tableau de variations de la fonction f.

5. Déterminer dans le repère $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ en son point A d'abscisse 0.
6. Tracer dans le repère $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, les droites Δ, T_A et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie C

1. Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$r(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

   On appelle r' la fonction dérivée de r, calculer $r'(x)$; en déduire une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
2. On considère la portion de plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$ l'asymptote Δ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.
   Hachurer cette portion de plan sur le graphique et donner la valeur exacte de son aire exprimée en cm^2 puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat STI La Réunion juin 2003 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

Durée de l'épreuve : 4 heures | Coefficient : 4

La candidat traitera obligatoirement les deux exercices et le problème

EXERCICE 1 **5 points**

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm, on considère trois points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{B}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{C}} = l.$$

   a. Déterminer la forme trigonométrique de z_{A} et z_{B}.

   b. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   Justifier l'alignement de ces points et tracer la droite correspondante.

2. Soient A′ et B′ les points du plan d'affixes respectives

$$z_{\text{A}'} = \frac{1}{z_{\text{A}}} \text{ et } z_{\text{B}'} = \frac{1}{z_{\text{B}}}.$$

   a. Donner la forme exponentielle de z_{A} et z_{B}.

   b. Calculer la forme algébrique de $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$

   c. Placer les points A′ et B′ sur le même schéma que précédemment.

   d. Préciser l'image de A′ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

3. **a.** Placer, sur le schéma précédent, le point I d'affixe $z_{\text{I}} = \dfrac{1}{2}$ et calculer les distances IA′, lB′ et IC

   b. En déduire que les points A′, B′ et C sont situés sur un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
   Tracer ce cercle sur le même schéma.

EXERCICE 2 **5 points** ‘

Une urne contient une boule rouge R, deux boules blanches B_1 et B_2, et deux boules noires N_1 et N_2 toutes indiscernables au toucher.
Un jeu consiste à tirer jeux boules successivement, sans remise.

1. En utilisant un arbre on un tableau, déterminer les 20 tirages possibles.
   On admet par la suite que ces 20 tirages sont équiprobables.

2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : « tirer deux houles de même couleur » ;
   B : « tirer au plus une boule noire ».

3. Lots du tirage de deux boules :
   — la boule rouge obtenue fait gagner 3 €,
   — chaque boule blanche obtenue fait gagner 2 €,
   — chaque boule noire obtenue fait perdre 3 €.
   On appelle X la variable aléatoire qui à tout tirage de deux boules, associe le gain, en euros, du joueur (une perte est considérée comme un gain négatif).

a. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour X ?

b. Écrire la loi de probabilité de X.

c. Calculer la probabilité P pour que le gain soit strictement positif.

d. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques. 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\text{e}^{-x}.$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x^2\text{e}^{-x} - 2x\text{e}^{-x} + \text{e}^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?

2. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et montrer que pour tout réel x :

$$f'(x) = \left(-x^2 + 4x - 3\right)\text{e}^{-x}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

   c. Dresser le tableau de variations de f. On donnera la valeur exacte des extremums.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) en son point A d'abscisse 0.

4. Tracer la courbe (Γ) et la tangente (T).

Partie B

On s'intéresse dans cette partie à l'équation $f(x) = \dfrac{1}{8}$.

1. En utilisant le tableau de variations de la fonction f, justifier que cette équation admet trois solutions dans $\mathbb{R}$ et que l'une des solutions notée α appartient à l'intervalle $[1~;~3]$.

2. à l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement d'amplitude $0,1$ de la solution α.

Partie C

Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = x^2\text{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.

∽ Baccalauréat STI Métropole juin 2003 ∽
Génie électronique

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, résoudre l'équation d'inconnue z

$$z^2 - 8z + 32 = 0.$$

   b. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.

2. Soit le nombre complexe $4e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donner sa forme algébrique.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 4 + 4i \qquad z_B = 4 - 4i \qquad z_C = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   b. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère un circuit électrique fermé comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur.
Le temps t est exprimé en secondes. à l'instant $t = 0$, on suppose le condensateur chargé, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.
On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulombs, du condensateur à l'instant t.
On définit ainsi une fonction q , deux fois dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, dont la dérivée première est notée q'.
On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \qquad y'' + \frac{1}{LC}y = 0$$

où y est définie et deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et de dérivée seconde y''.
Dans tout l'exercice on prend C $=1,25 \times 10^{-3}$ et L $= 0,5 \times 10^{-2}$.

1. **a.** Montrer que q est alors solution de l'équation différentielle

$$(E) : \qquad y'' + 1,6 \times 10^5 y = 0.$$

   b. Résoudre l'équation différentielle (E).

   c. Déterminer la solution particulière q de (E) vérifiant :

$$q(0) = 6 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad q'(0) = 0.$$

2. On sait que la valeur $i(t)$ de l'intensité, exprimée en ampères, du courant qui parcourt le circuit à l'instant t vérifie $i(t) = -q'(t)$. On définit ainsi une fonction i sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

   a. Vérifier que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$

$$i(t) = 2,4\sin(400t).$$

   b. Calculer : $\dfrac{400}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{400}} \cos(800t)\,dt$.

c. On désigne par I_e la valeur, exprimée en ampères, de l'intensité efficace dans le circuit. Son carré est donné par la formule :

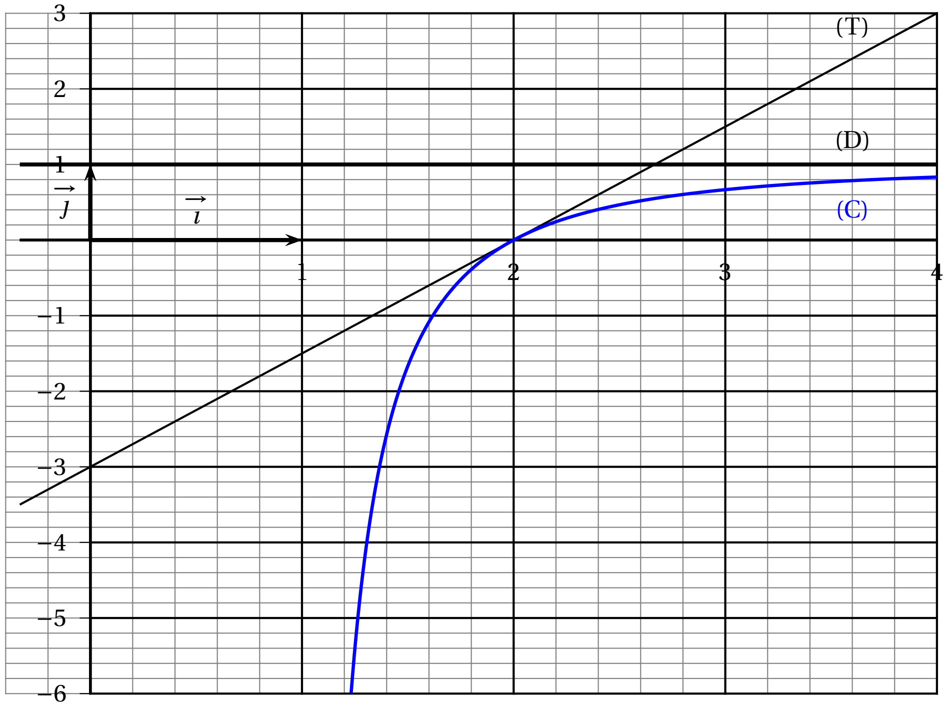
$$\mathrm{I}_e^2 = \frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}} i^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer I_e^2 (on pourra utiliser la formule $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$), puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près, sachant que I_e est un nombre positif.

PROBLÈME — 11 points

Partie A

On donne, dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction g définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ ainsi que deux droites (T) et (D). La droite (T) passe par les points de coordonnées respectives $(2\,;\,0)$ et $(0\,;\,-3)$. La droite (D) a pour équation $y = 1$.



1. **a.** Déterminer graphiquement $g(2)$.
   b. Sachant que la droite (T) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement $g'(2)$.
   c. On admet que la droite (D) est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. Déterminer graphiquement la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   d. Sachant que la courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses en un seul point, étudier graphiquement le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
2. On définit les fonctions g_1, g_2 et g_3 sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g_1(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \quad ; \quad g_2(x) = 1 - \frac{2}{x^2-x} \quad ; \quad g_3(x) = \ln(x-1).$$

L'une d'elles est la fonction g que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a. Calculer $g_1(2)$, $g_2(2)$ et $g_3(2)$.
Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x)$.
Quelle fonction peut-on alors éliminer ?

c. On note g_1' et g_2' les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2.
Calculer $g_1'(2)$ et $g_2'(2)$ puis conclure.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 + 2\ln x - 2\ln(x-1).$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\ ?$$

b. Déterminer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

c. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{x}{x-1} > 1$.
Quel est alors le signe de $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ pour x appartenant à $]1\ ;\ +\infty[$?

d. En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à la droite (D).

3. a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction trouvée dans la **partie A**.

b. À l'aide des résultats graphiques obtenus dans la **partie A**, dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie C

1. Montrer que, sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, la fonction H définie par

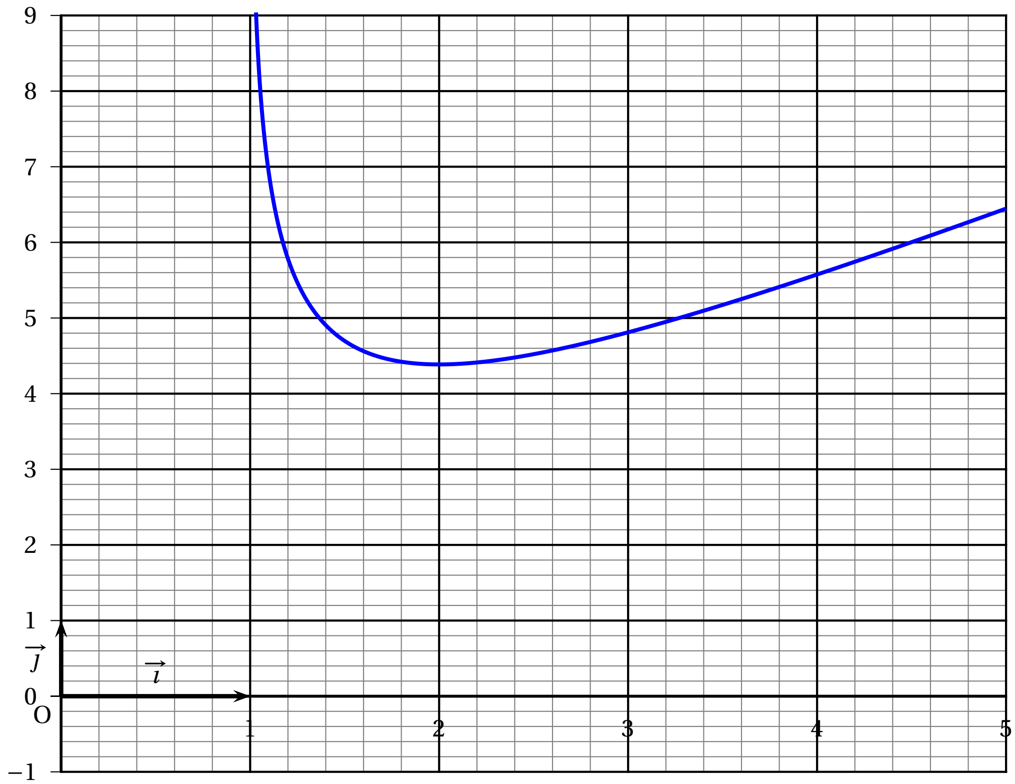
$$H(x) = x\ln x - (x-1)\ln(x-1)$$

est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \ln x - \ln(x-1)$ sur cet intervalle.

2. a. Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe $(\mathscr{C}_f)$. Sur cette figure, représenter la droite (D) et hachurer la partie du plan comprise entre la droite (D), la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

b. On désigne par $\mathscr{A}$ la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.

Annexe : représentation de la courbe ($\mathscr{C}_f$)
à rendre avec la copie



Baccalauréat STI Polynésie juin 2003
Génie électronique, électrotechnique, optique

Durée de l'épreuve : 4 heures | Coefficient : 4

La candidat traitera obligatoirement les deux exercices et le problème

EXERCICE 1 **5 points**

La feuille fournie en annexe sera rendue avec la copie
Dans cet exercice, les probabilités seront données sous forme de fractions simplifiées.

Deux urnes contiennent chacune trois jetons indiscernables au toucher : la première contient trois jetons verts numérotés de 0 à 2 et la seconde trois jetons blancs numérotés de 0 à 2.
On tire au hasard un jeton dans la première urne et on note a son numéro, puis un jeton dans la seconde urne et on note b son numéro.
Le résultat d'un tirage est donc un couple $(a\,;\,b)$ et les tirages sont équiprobables.

1. **a.** En complétant l'arbre donné en annexe, déterminer le nombre d'éventualités.
   b. Quelle est la probabilité P d'obtenir une somme $a+b$ multiple de 3 ?
2. à tout couple $(a\,;\,b)$ précédemment défini, on associe le nombre complexe z écrit sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}b$ où i est le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
   On note $|z|$ le module de z.
   a. Quelle est la probabilité P_1 pour que z soit réel ?
   b. Quelle est la probabilité P_2 pour que $|z| = 1$?
3. Soit X la variable aléatoire qui, à tout nombre complexe z défini ci-dessus, associe son module.
   a. Compléter le tableau des valeurs de X donné en annexe.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Déterminer la probabilité P_3 de l'évènement « $|z| \leqslant 2$ ».
   d. Déterminer l'arrondi au centième de l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} : \quad 16y'' + 25y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & \sqrt{3} \\ f'(0) & = & \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{5}{4}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[\dfrac{2\pi}{15}\,;\,\dfrac{4\pi}{15}\right]$.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(1-x) \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1.

Partie A : Détermination de f

Déterminer $a,\ b,\ c$ de façon que les conditions suivantes soient remplies :

- $\mathscr{C}$ passe par le point O et admet en ce point une tangente $\mathscr{C}$ de coefficient directeur 1 ;
- la tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.

Dans toute la suite du problème on prend $f(x) = x^2 + 3x + 2\ln(1-x)$.

Partie B : étude de la fonction f et tracé de $\mathscr{C}$

1. Déterminer la limite de f en 1. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction g définie sur $]-\infty\,;\,1[$ par $g(x) = x^2+3x$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
3. On désigne par f' la dérivée de f. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{(1-2x)(x+1)}{1-x}$ pour tout nombre réel x strictement inférieur à 1.
4. étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. Dresser le tableau de variations de f.
5. **a.** En utilisant le tableau de variations, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

   b. On note α la solution appartenant à $]-\infty\,;\,-1[$. Justifier que α appartient à $]-2\,;\,-1,8[$.
6. Construire $\mathscr{D}$, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie C : calcul d'aire

1. **a.** Soient H et h les fonctions définies sur $]-\infty\,;1[$ par :

   $$H(x) = (x-1)\ln(1-x) - x \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(1-x).$$

   Démontrer que H est une primitive de h sur $]-\infty\,;1[$.

   b. En déduire une primitive F de f sur $]-\infty\,;1[$.
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$.
   On donnera la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en cm^2 en fonction de α.

ANNEXE

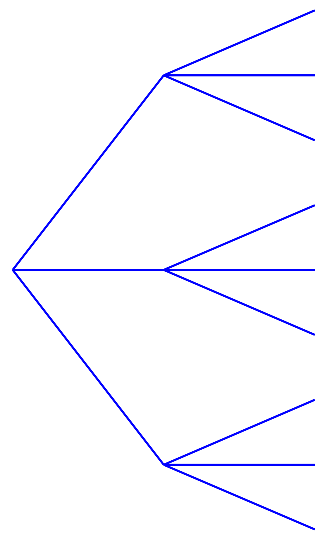


Tableau des valeurs de X

b \ a	0	1	2
0			
1			
2			

Baccalauréat STI Métropole
Génie électronique juin 2003

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, résoudre l'équation d'inconnue z

$$z^2 - 8z + 32 = 0.$$

   b. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.

2. Soit le nombre complexe $4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$. Donner sa forme algébrique.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 4 + 4\text{i} \qquad z_{\text{B}} = 4 - 4\text{i} \qquad z_{\text{C}} = 2 + 2\text{i}\sqrt{3}.$$

   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

   b. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère un circuit électrique fermé comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur.
Le temps t est exprimé en secondes. à l'instant $t = 0$, on suppose le condensateur chargé, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.
On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulombs, du condensateur à l'instant t.
On définit ainsi une fonction q , deux fois dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, dont la dérivée première est notée q'.
On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \qquad y'' + \frac{1}{\text{LC}}y = 0$$

où y est définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et de dérivée seconde y''.
Dans tout l'exercice on prend C $=1,25 \times 10^{-3}$ et L $= 0,5 \times 10^{-2}$.

1. **a.** Montrer que q est alors solution de l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \qquad y'' + 1,6 \times 10^5\, y = 0.$$

   b. Résoudre l'équation différentielle (E).

   c. Déterminer la solution particulière q de (E) vérifiant :

$$q(0) = 6 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad q'(0) = 0.$$

2. On sait que la valeur $i(t)$ de l'intensité, exprimée en ampères, du courant qui parcourt le circuit à l'instant t vérifie $i(t) = -q'(t)$. On définit ainsi une fonction i sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   a. Vérifier que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$

$$i(t) = 2,4\sin(400t).$$

   b. Calculer : $\dfrac{400}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{400}} \cos(800t)\,\text{d}t$.

c. On désigne par I_e la valeur, exprimée en ampères, de l'intensité efficace dans le circuit. Son carré est donné par la formule :

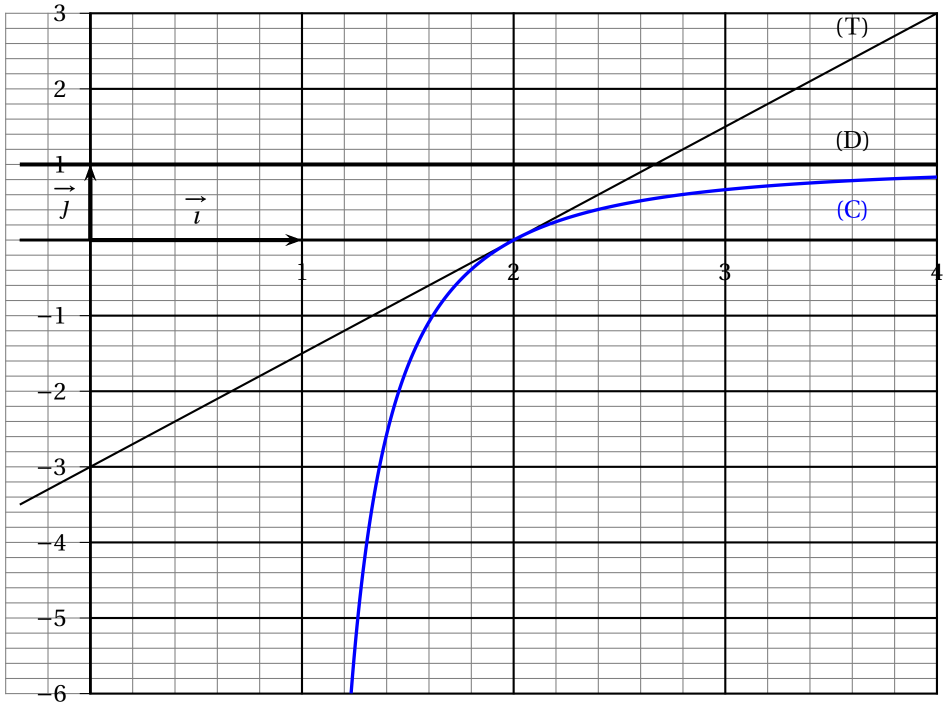
$$\mathrm{I}_e^2 = \frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}} i^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer I_e^2 (on pourra utiliser la formule $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$, puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près, sachant que I_e est un nombre positif.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On donne, dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction g définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ ainsi que deux droites (T) et (D). La droite (T) passe par les points de coordonnées respectives $(2\,;\,0)$ et $(0\,;\,-3)$. La droite (D) a pour équation $y = 1$.



1. **a.** Déterminer graphiquement $g(2)$.
   b. Sachant que la droite (T) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement $g'(2)$.
   c. On admet que la droite (D) est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. Déterminer graphiquement la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   d. Sachant que la courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses en un seul point, étudier graphiquement le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
2. On définit les fonctions g_1, g_2 et g_3 sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g_1(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \quad ; \quad g_2(x) = 1 - \frac{2}{x^2 - x} \quad ; \quad g_3(x) = \ln(x-1).$$

L'une d'elles est la fonction g que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a. Calculer $g_1(2)$, $g_2(2)$ et $g_3(2)$.
Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g_2(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_3(x)$.
Quelle fonction peut-on alors éliminer ?

c. On note g_1' et g_2' les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2.
Calculer $g_1'(2)$ et $g_2'(2)$ puis conclure.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 + 2\ln x - 2\ln(x-1).$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1~;~+\infty[$,

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) ?$$

   b. Déterminer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Justifier que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

   c. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]1~;~+\infty[$, $\dfrac{x}{x-1} > 1$.
   Quel est alors le signe de $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ pour x appartenant à $]1~;~+\infty[$?

   d. En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à la droite (D).

3. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]1~;~+\infty[$, $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction trouvée dans la **partie A**.

   b. À l'aide des résultats graphiques obtenus dans la **partie A**, dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie C

1. Montrer que, sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$, la fonction H définie par

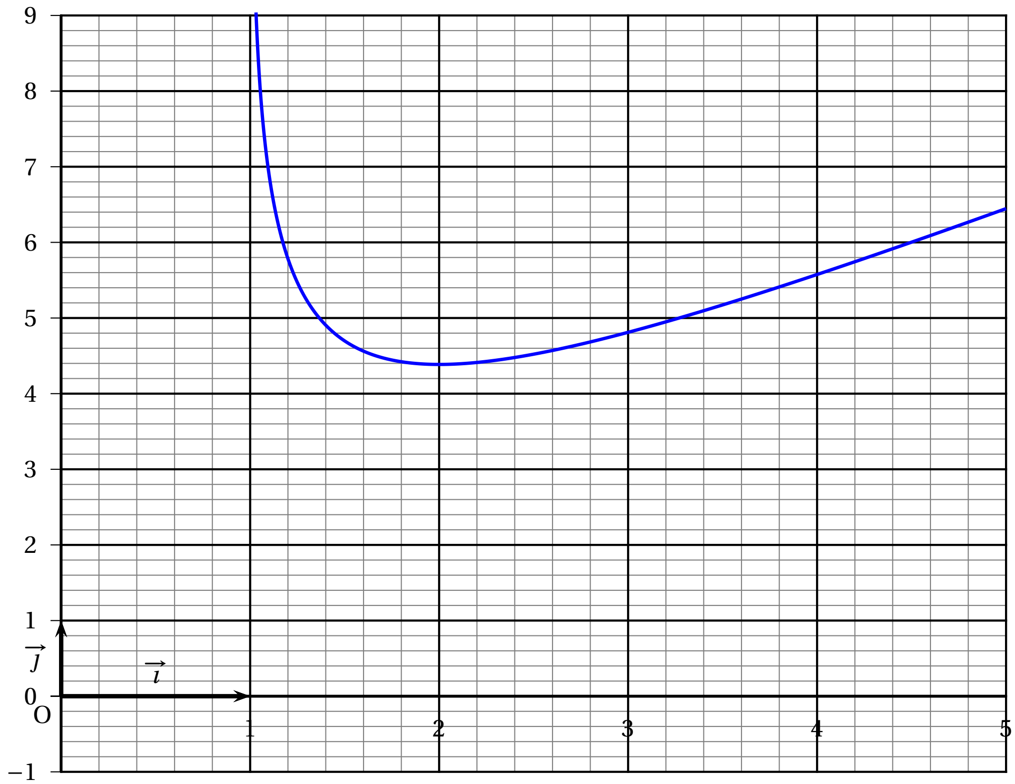
$$H(x) = x\ln x - (x-1)\ln(x-1)$$

   est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \ln x - \ln(x-1)$ sur cet intervalle.

2. **a.** Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe $(\mathscr{C}_f)$. Sur cette figure, représenter la droite (D) et hachurer la partie du plan comprise entre la droite (D), la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

   b. On désigne par $\mathscr{A}$ la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.

Annexe : représentation de la courbe $(\mathscr{C}_f)$
à rendre avec la copie



Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie
Génie mécanique, énergétique, civil novembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

On note i nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Pour tout nombre complexe z on pose $P(z) = z^3 - 2z - 4$.

1. Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a $P(z) = (z-2)(z^2 + 2z + 2)$.
2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.
3. On appelle A, B, C et D les points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives :

$$z_\text{A} = -1 - \text{i}\,;\; z_\text{B} = 2\,;\; z_\text{C} = 3 + 3\text{i}\,;\; z_\text{D} = 2\text{i}.$$

   a. Placer les points A, B C et D dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.

   b. Calculer $z_\text{B} - z_\text{A},\ z_\text{C} - z_\text{D},\ z_\text{D} - z_\text{A}$.

   c. Justifier alors que $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{CD}}$ et que AD = AB.

   d. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 2 **5 points**

On considère les intégrales I et J définies par I$= \displaystyle\int_0^{\pi} x(\cos x)^2\,\text{d}x$ et J $= \displaystyle\int_0^{\pi} x(\sin x)^2\,\text{d}x$.

Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs exactes de ces intégrales sans les calculer.

1. Déterminer la valeur exacte de I + J.
2. On se propose dans cette question de rechercher de la valeur exacte de I − J.

   a. Démontrer que I − J $= \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(2x)\,\text{d}x$.

   b. On appelle f la fonction numérique définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x).$$

   Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = x\cos(2x)$.

   c. En déduire la valeur exacte de I − J.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs exactes des intégrales I et J.

PROBLÈME **10 points**

I) Première partie : étude d'une fonction g

On appelle g la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x) = (x+1)\text{e}^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$. (On pourra écrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = x\text{e}^x + \text{e}^x + 1$).
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Étude du signe de $g(x)$.

a. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x et étudier son signe sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

b. En déduire le sens de variation de g s It et dresser son tableau de variations dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum de g.

c. Justifier que pour tout x, $g(x) > 0$.

II) Deuxième partie : étude et représentation graphique d'une fonction *f*

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^x + x - 3$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan, unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
2. On appelle (D) la droite d'équation $y = x - 3$.

   a. Démontrer que la droite (D) est asymptote á la courbe $\mathscr{C}$.

   b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (D). On précisera les coordonnées de leur point d'intersectian I.
3. Étude des variations de f.

   a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.

   b. À l'aide des résultats obtenus dans la première partie, déterminer le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
5. Tracer la droite (D), la tangente (T) puis la courbe dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

III) Troisième partie : le but de cette partie est de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et de donner un encadrement de celles-ci.

1. En utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et en justifiant la réponse, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Localisation et encadrement d'une solution.

   a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

   b. Justifier les trois affirmations suivantes :

   (1) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$.

   (2) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

   (3) L'équation $f(x) = 0$ a une solution unique notée α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   c. En expliquant brièvement la méthode utilisée, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

∽ Baccalauréat STI Métropole juin 2003 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2+2z+2=0.$$

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}-\{1\}$ l'équation : $\dfrac{z+1}{z-1}=2-\text{i}$. On écrira la solution sous forme algébrique.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}}=-1+\text{i}$, $z_{\text{B}}=-1-\text{i}$ et $z_{\text{C}}=2+\text{i}$.

   a. Représenter les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

   b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Le justifier.

   c. En déduire l'affixe du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le rayon r de ce cercle.

EXERCICE 2 **5 points**

Soit l'équation différentielle : $4y''+\pi^2y=0$.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Déterminer la fonction g solution de cette équation différentielle qui satisfait aux conditions suivantes :
   - la courbe représentative de g passe par le point N de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
   - la tangente à cette courbe en N est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Vérifier que pour tout nombre réel x, $g(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Résoudre sur l'intervalle $[-2~;~2]$ l'équation $g(x)=-\dfrac{1}{2}$.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x)=\text{e}^{2x}+x.$$

Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étude du comportement de f en $-\infty$.

   a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Montrer que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation : $y=x$.

   c. Étudier les positions relatives de Δ et de $\mathscr{C}$.

2. Étude du comportement de f en $+\infty$:
   Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. étude des variations de f

a. Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b. Établir le tableau de variations de f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. Vérifier que le point A $(1~;~\text{e}^2+1)$ appartient à T.

5. Dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ tracer Δ, T et $\mathscr{C}$.

6. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une solution α et une seule sur $[-1~;~0]$.

b. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près. Justifier le résultat.

7. Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$, et $x = 1$.

a. Hachurer la partie $\mathscr{D}$.

b. Calculer, en unités d'aire et en fonction de α, la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie $\mathscr{D}$.

c. Vérifier, en utilisant l'égalité $f(\alpha) = 0$, que $\mathscr{A}(\alpha) = \dfrac{1}{2}\left(\text{e}^2 - \alpha^2 + \alpha + 1\right)$.

d. Déterminer, au mm^2 près, une valeur approchée de $\mathscr{A}(\alpha)$ en prenant $-0,43$ comme valeur approchée de α.

Durée : 4 heures

∽ STI Génie mécanique, génie des matériaux septembre 2003 ∽ Métropole

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On considère les points E, F et G d'affixes respectives :

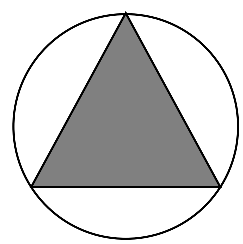
$$z_{\text{E}} = 1 + \text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_{\text{F}} = 2z_{\text{E}} \quad ; \quad z_{\text{G}} = 3 + \text{i}\sqrt{3}.$$

1. Écrire z_{E}, z_{F} et z_{G} sous forme trigonométrique.
2. Placer les points E, F et G dans $\mathscr{P}$.
3. Montrer que le triangle EFG est équilatéral. Le tracer.
4. Montrer que le point I $\left(2\,;\,\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle EFG. Tracer $\mathscr{C}$.

Partie B

On considère que le disque déterminé par $\mathscr{C}$ forme une cible décomposée en deux zones :
- une zone triangulaire noire nommée N.
- une zone blanche nommée B.

On suppose que la probabilité, pour un tireur, d'atteindre N est $0,5$ et celle de rater la cible est $0,2$.



Cible

1. **a.** Quelle est la probabilité d'atteindre la cible ?
   b. Quelle est la probabilité d'atteindre B ?
2. On considère un tireur qui tire sur la cible.
   — S'il atteint B, il gagne 5 euros.
   — S'il atteint N, il gagne 2 euros.
   — S'il rate la cible, il doit payer 8 euros.
   Soit X la variable aléatoire qui à chaque tir associe le gain correspondant (positif ou négatif).
   a. Définir la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il équitable ?
   c. Calculer la valeur arrondie à 10^{-2} près de l'écart type de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Par la suite, on désigne par I l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x de I, par

$$f(x) = \cos x + \sin x.$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f puis la fonction dérivée seconde f'' de f.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x de I, $f''(x) < 0$.
   b. En déduire le tableau de variations de f' sur I.
   c. Calculer $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à I.
   d. En déduire le tableau de variations de f sur I.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentant f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. (Unités 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur celui des ordonnées).
4. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x de I,

$$[f(x)]^2 = 1 + \sin 2x.$$

   b. En déduire une primitive sur I de la fonction qui, à tout nombre réel x de I, associe $[f(x)]^2$.
5. Soit V le volume du solide engendré par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.
   Calculer V en unités de volume.
   (On rappelle que $\text{V} = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2\,\text{d}x$).

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. Étudier, en fonction du nombre réel x, le signe de $x^2 - 1$.
2. Étudier, en fonction du nombre réel x, le signe de $\text{e}^x - 6$.
3. Déduire des questions précédentes, en fonction du nombre réel x, le signe de $(x^2 - 1)\,(\text{e}^x - 6)$.

Partie B

On considère les fonctions g et f définies, pour tout nombre réel x, par :

$$g(x) = -2x^3 + 6x \quad \text{et} \quad f(x) = (x-1)^2\text{e}^x + g(x).$$

1. **a.** Calculer la limite de g en $-\infty$.
   b. Calculer la limite de f en $-\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2\text{e}^x = 0$).
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x non nul,

$$f(x) = x\text{e}^x\left(x - 2 + \frac{1}{x} - 2\frac{x^2}{\text{e}^x} + \frac{6}{\text{e}^x}\right).$$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = (x^2 - 1)\left(\text{e}^x - 6\right).$$

4. Déduire de la troisième question de la **partie A** le tableau de variations de f.
5. Soient $\mathscr{C}$ et Γ les courbes représentant respectivement f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur celui des ordonnées).
   a. Calculer la limite de $f - g$ en $-\infty$,
   b. En déduire que $\mathscr{C}$ et Γ sont asymptotes.

c. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ et préciser les coordonnées du point E commun à $\mathscr{C}$ et Γ.

6. La courbe Γ est tracée sur la feuille annexe que l'on rendra avec la copie. Compléter ce dessin en traçant $\mathscr{C}$ ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}$ aux trois points d'abscisses -1, 1 et $\ln 6$.

Partie C

1. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction H définie, pour tout nombre réel x, par

$$H(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^x$$

soit une primitive de la fonction qui, à tout nombre réel x, associe $\left(x^2 - 2x + 1\right)\text{e}^x$.

2. Soit D, la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, Γ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.
Colorier D puis calculer les valeurs exactes de l'aire de D en unités d'aire et en cm^2.

Figure annexée au sujet, à compléter et à rendre avec la copie